بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم اداری و اقتصاد

گروه مدیریت

مهندسی مالی پیشرفته

دکتر سعید فتحی

دانشیار گروه مدیریت

دانشگاه اصفهان

طرح درس

سرفصل

- ✓ استراتژی‌های اختیار معامله
- ✓ محدودیتهای آربیتراژ در قیمت‌گذاری اختیارات
- ✓ مدلهای قیمت‌گذاری اختیارات
- ✓ مدل قیمت گذاری قرارداد آتی Cost of Carry
- ✓ استراتژی‌های ریسک با قرارداد آتی
- ✓ نسبت پوشش ریسک
- ✓ قرارداد سوآپ

منبع اصلی

- ✓ **Dubofsky, David. A. (1992). Options and financial futures, INC: McGraw-Hill.**

منبع فرعی

- ✓ **Hull, J. C. (2012). Options, Futures, and other Derivatives. New York: Prentice Hall.**

تکالیف

- ✓ شرکت در امتحان پایان ترم
- ✓ انجام تکالیفی که در کلاس اعلام می شود.

استراتژی‌های اختیار معامله

ترکیباتی از موقعیتهای معاملاتی روی اختیارهای مختلف و در مواردی با سایر ابزارهای مشتقه

پیش‌فرض‌های استراتژی‌های اختیار معامله

- ✓ دو زمان وجود دارد: زمان عقد قراداد و زمان اعمال.
- ✓ سرمایه‌گذار موقعیت معاملاتی خود را تا زمان اعمال نمی‌بندد.
- ✓ کارمزد، سود تقسیمی و وجه تضمین وجود ندارد.
- ✓ ارزش زمانی پول مطرح نیست یا به عبارتی نرخ بهره صفر است.

اجزای مورد مطالعه در یک استراتژی

- ✓ تشکیل سبدی از یک یا چند قرارداد اختیار
- ✓ معادله جبری سود استراتژی
- ✓ نمودار سود استراتژی
- ✓ تابع جدولی و مثال سود استراتژی
- ✓ شرایط انتخاب استراتژی
- ✓ تابع چگالی قیمت دارایی پایه برای انتخاب استراتژی

استراتژی‌های مقدماتی (تک موقعیتی)

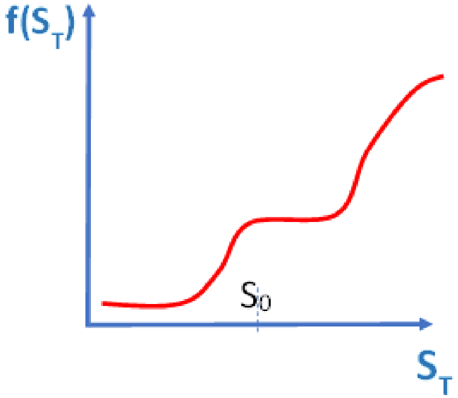
- ✓ خرید نقد Spot Long
- ✓ فروش نقد Spot Short یا Shortsell
- ✓ خرید آتی Future Long
- ✓ فروش آتی Future Short
- ✓ خرید اختیار خرید Call Long
- ✓ صدور اختیار خرید Call Write
- ✓ خرید اختیار فروش Put Long
- ✓ صدور اختیار فروش Put Write

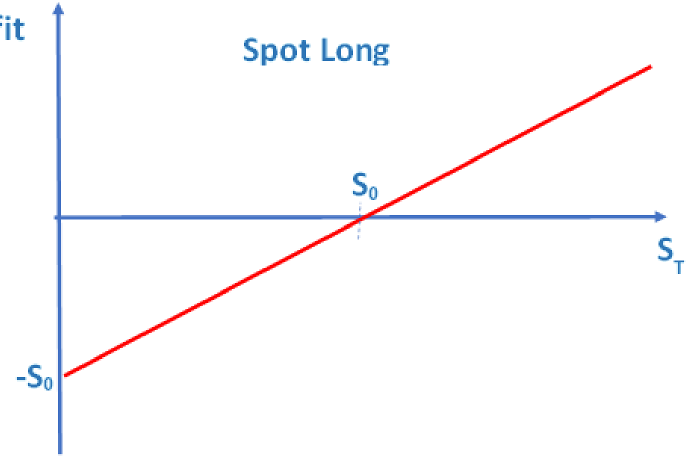
استراتژی خرید و فروش نقد

مثال در اکسل

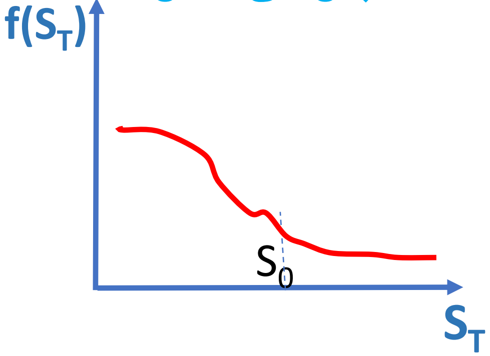
- خرید نقد Spot Long یا Spot Buy
  - جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = -S_0$
  - جریان نقدی زمان تسویه $CF_T = +S_T$
  - سود استراتژی $\Pr = S_T - S_0$
- فروش نقد Short Spot یا Spot Sell
  - جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = +S_0$
  - جریان نقدی زمان تسویه $CF_T = -S_T$
  - سود استراتژی $\Pr = S_0 - S_T$

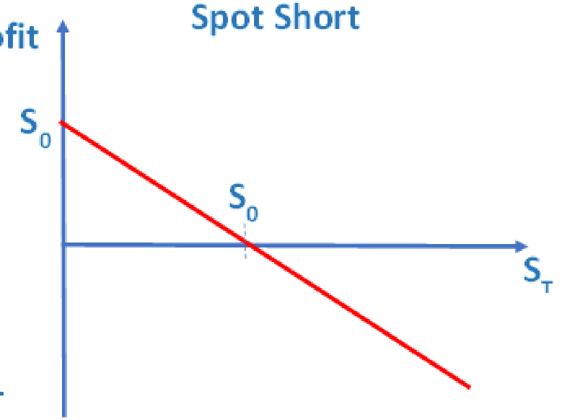
پیش بینی افزایش قیمت





پیش بینی کاهش قیمت





استراتژی خرید و فروش آتی

✓ خرید آتی Future Long

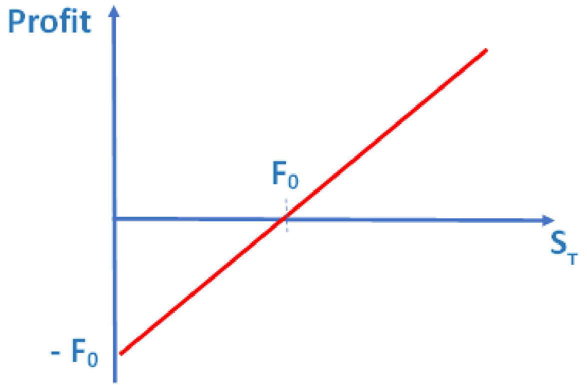
- ✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد: $CF_0 = 0$
- ✓ جریان نقدی زمان تسویه: $CF_T = S_T - F$
- ✓ سود استراتژی: $\mathrm{Pr} = S_T - F$

✓ فروش آتی Short Future

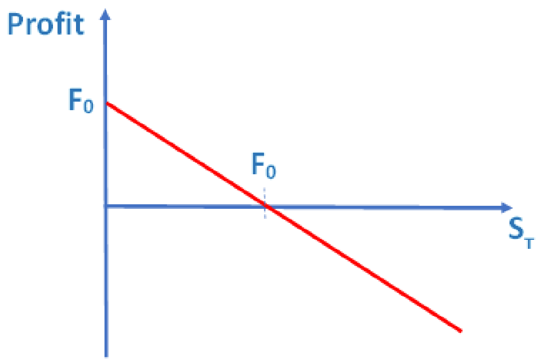
- ✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد: $CF_0 = 0$
- ✓ جریان نقدی زمان تسویه: $CF_T = F - S_T$
- ✓ سود استراتژی: $\mathrm{Pr} = F - S_T$

مثال اکسل

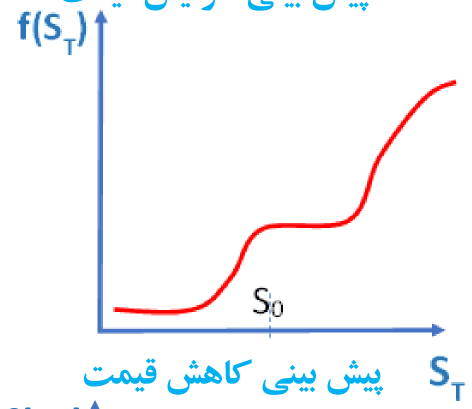
Long Future



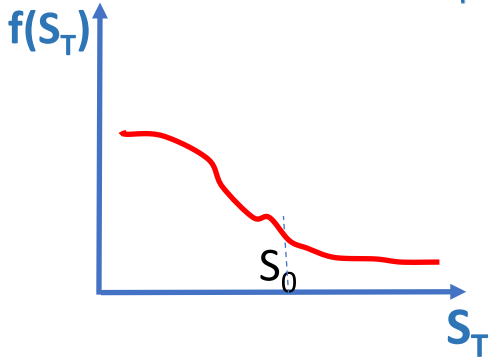
Short Future



پیش بینی افزایش قیمت



پیش بینی کاهش قیمت



دلیل انتخاب استراتژی آتی به جای نقد

- ✓ عدم سرمایه‌گذاری
- ✓ مساله وجه تضمین
- ✓ پرداخت بهره به معنای حساب فردی
- ✓ با فرض عدم وجه تضمین
- ✓ بافرض عدم هزینه مبادله
- ✓ بدون در نظر گرفتن ارزش زمانی پول
- ✓ ریسک بالای سفته‌بازی بسته به اهرم

استراتژی خرید اختیار خرید

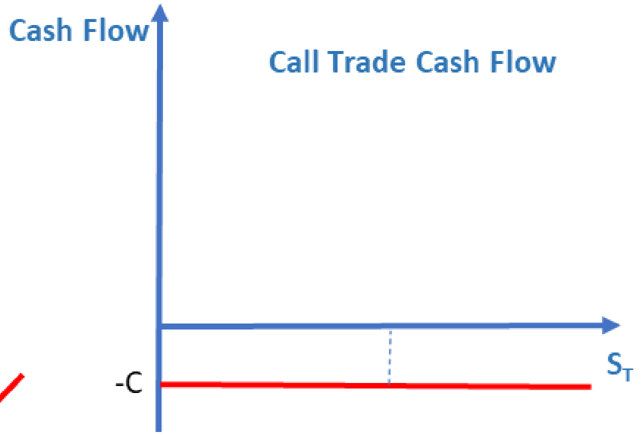
مثال در اکسل

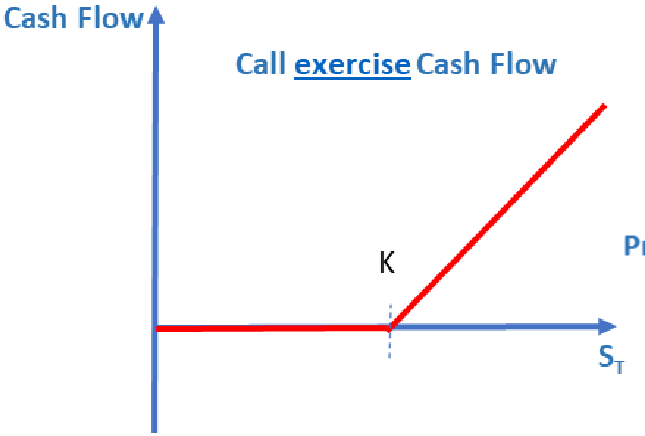
- ✓ خرید اختیار خرید (Call Long)
- ✓ معادله مادر $Pr=-C+(S_T-K)$
- ✓ شرط اعمال اختیار $S_T>K$ با جریان نقدی (S_T-K)
- ✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = -C$
- ✓ تابع جریان نقدی اعمال

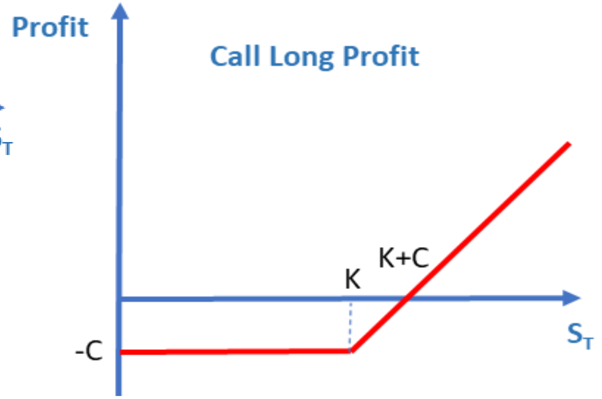
$$CF_{Ex} = \begin{cases} 0, & S_T \leq K \\ S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$

- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} -C, & S_T \leq K \\ -C + S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$

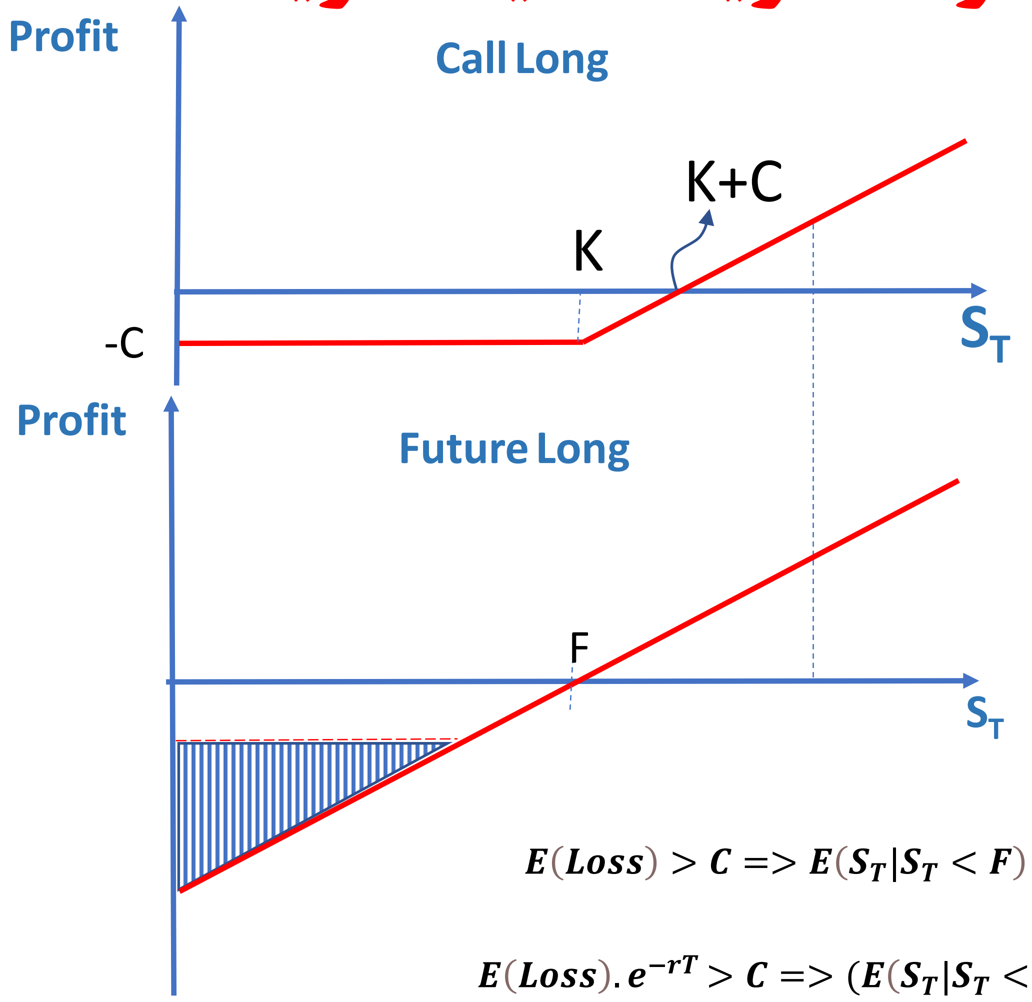




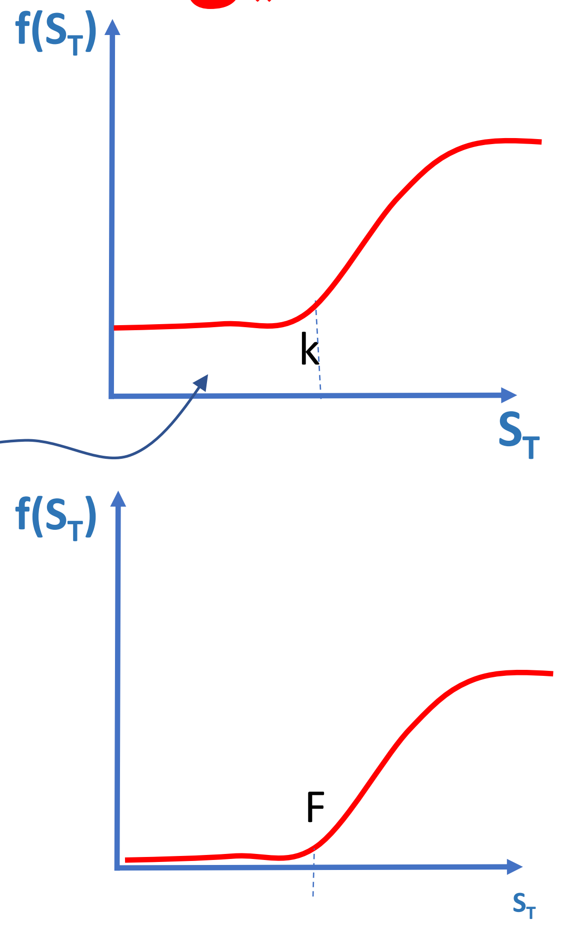


- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = -C$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K+C$

دلیل انتخاب استراتژی خرید اختیار خرید



$$\int_0^K f(S_T).d_{S_T}$$



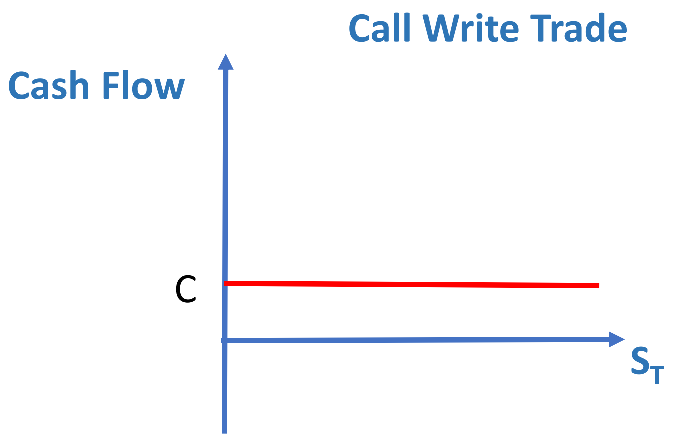
$$E(Loss) > C => E(S_T|S_T < F) - \mathrm{F} > C$$

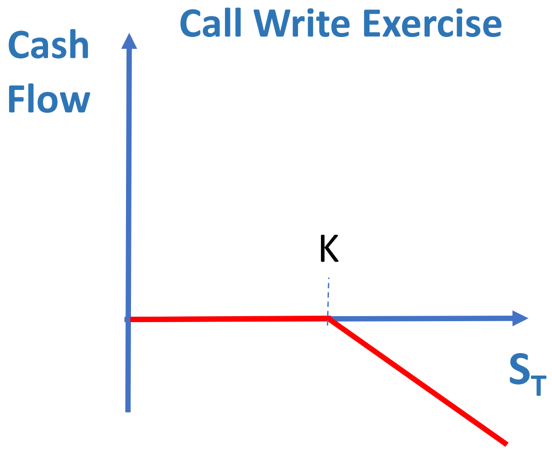
$$E(Loss).e^{-rT} > C => (E(S_T|S_T < F) - F).e^{-rT} > C$$

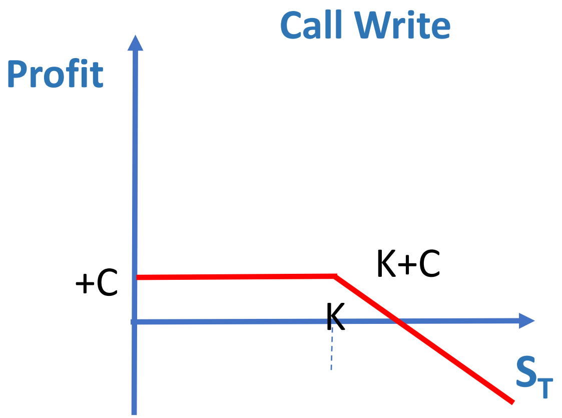
استراتژی صدور اختیار خرید

- ✓ صدور اختیار خرید (Call Write)
- ✓ معادله مادر $Pr=+C-(S_T-K)$
- ✓ شرط اعمال اختیار $S_T>K$ با جریان نقدی $-(S_T-K)$
- ✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = +C$
- ✓ تابع جریان نقدی اعمال $CF_{Ex} = \begin{cases} 0, & S_T \le K \\ -S_T + K, & S_T > K \end{cases}$
- ✓ تابع سود $Pr = \begin{cases} +C, & S_T \le K \\ C - S_T + K, & S_T > K \end{cases}$

مثال در اکسل

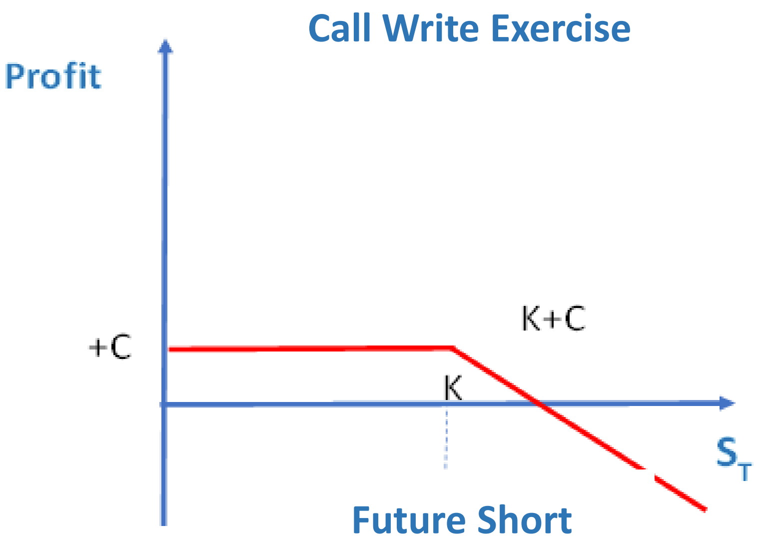


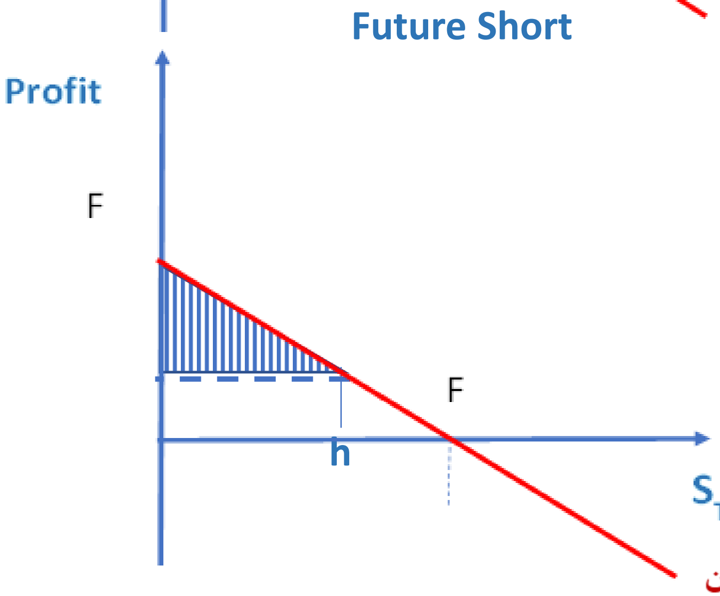


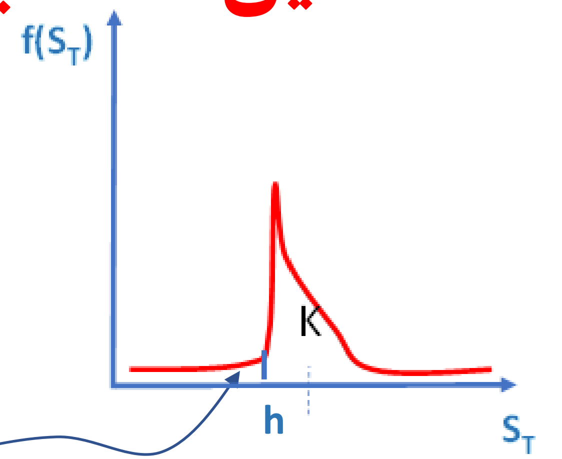


- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = C$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K\text{+C}$

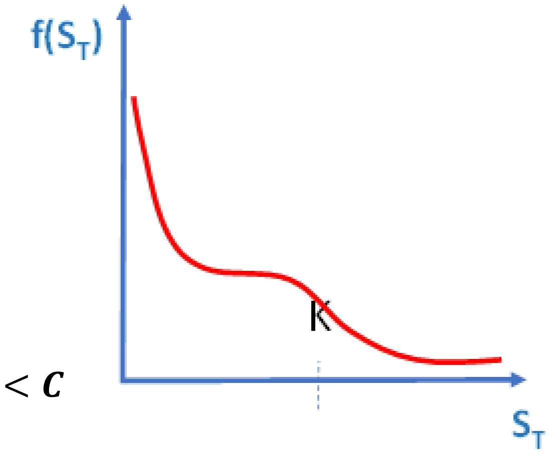
دلیل انتخاب استراتژی صدور اختیار خرید







$$\int_0^h f(S_T).d_{S_T}$$



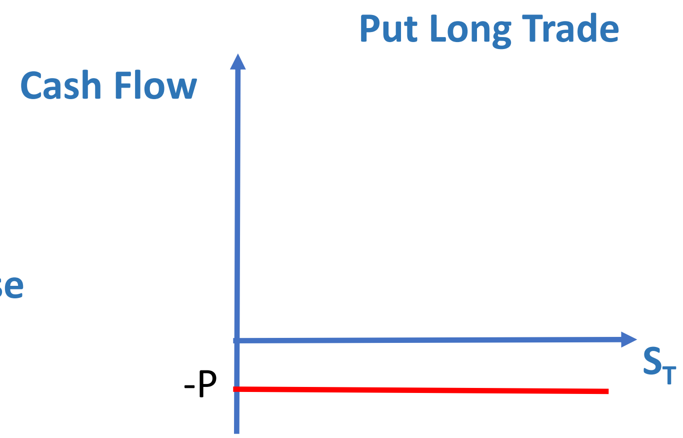
$$E(Prof) < C => \ (F - E(S_T|S_T < h)) < C$$

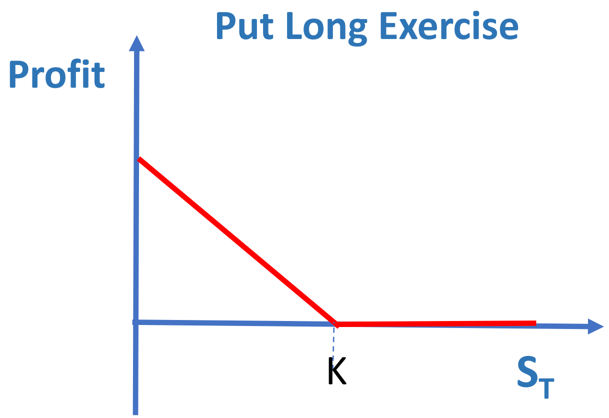
$$E(\text{Prof}).e^{-rT} < C => (F - (E(S_T|S_T < h)).e^{-rT} < C$$

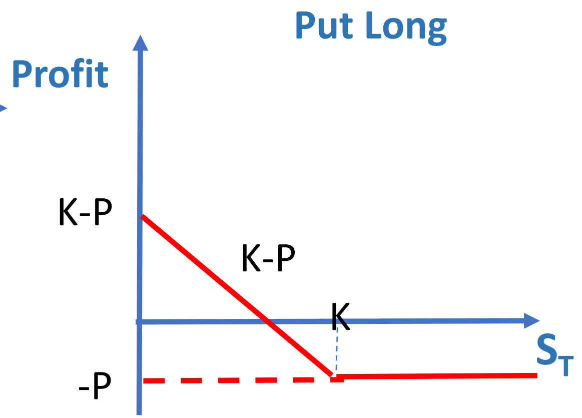
استراتژی خرید اختیار فروش

- ✓ خرید اختیار فروش (Put Long)
- ✓ معادله مادر $Pr = -P + (K - S_T)$
- ✓ شرط اعمال اختیار $S_T < K$ با جریان نقدی $(K - S_T)$
- ✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = -P$
- ✓ تابع جریان نقدی اعمال $CF_{Ex} = \begin{cases} 0, & S_T \geq K \\ -S_T + K, & S_T < K \end{cases}$
- ✓ تابع سود $Pr = \begin{cases} -P, & S_T \geq K \\ -P - S_T + K, & S_T < K \end{cases}$

مثال در اکسل

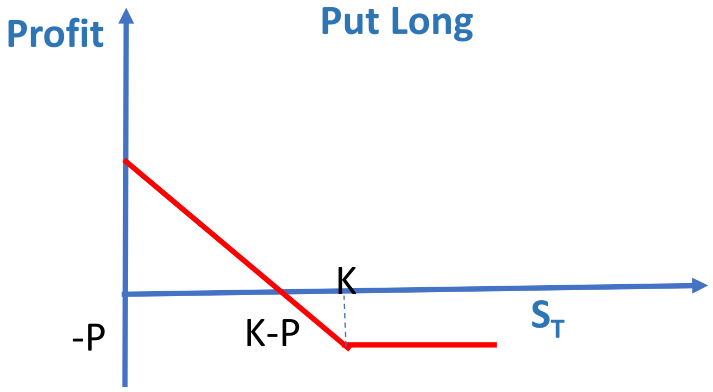


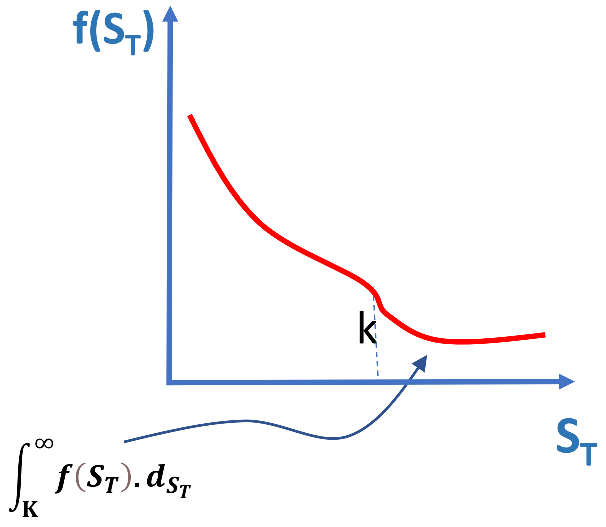


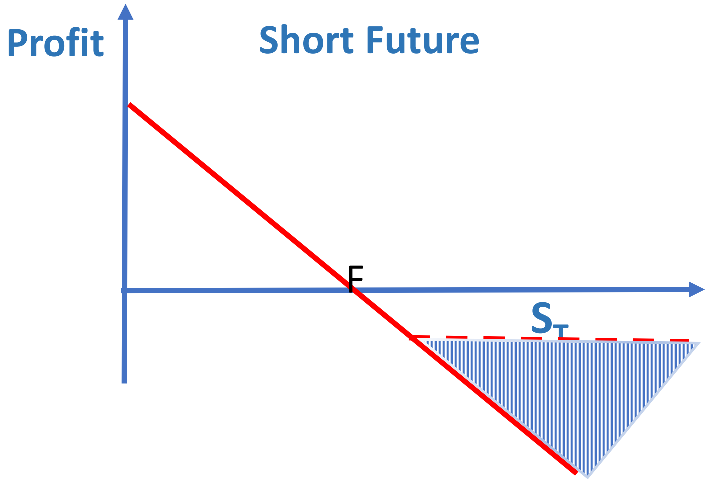


- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = K - P$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K - P$

دلیل انتخاب استراتژی خرید اختیار فروش

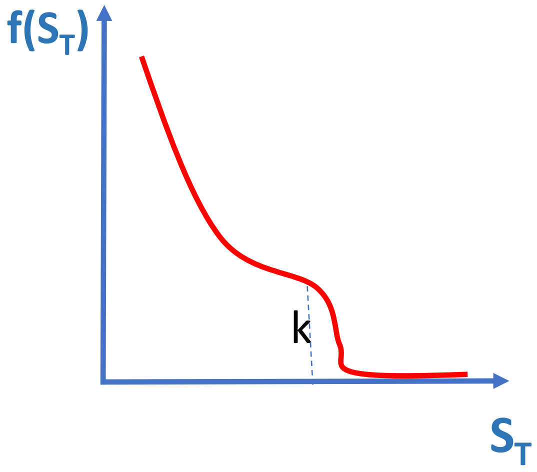






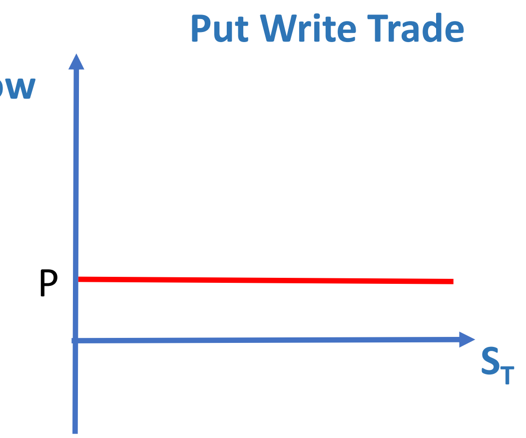
$$E(Loss) > P => K - E(S_T|S_T > K) > \mathrm{P}$$

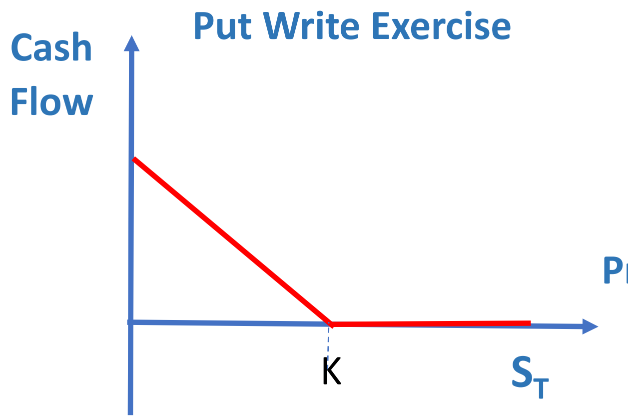
$$E(Loss).e^{-rT} > P => \left(K - E(S_T|S_T > K)\right).e^{-rT} > P$$

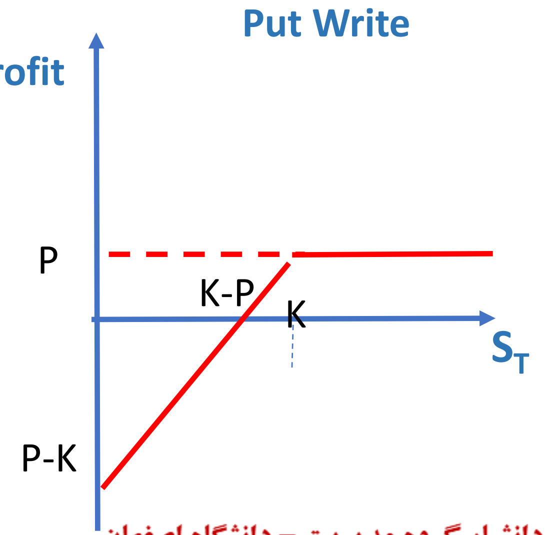


استراتژی صدور اختیار فروش

[مثال در اکسل](#)







✓ صدور اختیار فروش (Put Write)

✓ معادله مادر $Pr= +P-(K-S_T)$

✓ شرط اعمال اختیار $S_T<K$ با جریان نقدی $-(K-S_T)$

✓ جریان نقدی زمان ایجاد سبد $CF_0 = +P$

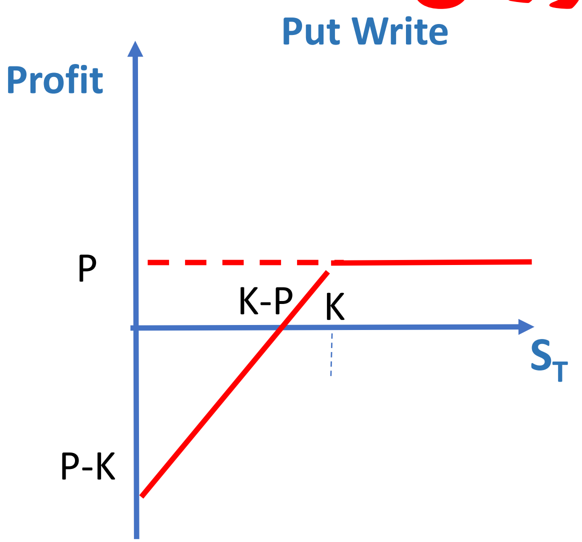
✓ تابع جریان نقدی اعمال
$$CF_{Ex} = \begin{cases} 0, & S_T \geq K \\ S_T - K, & S_T < K \end{cases}$$

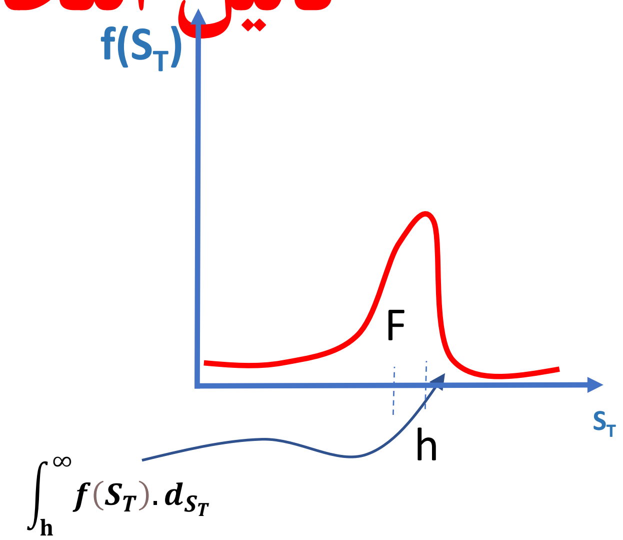
✓ تابع سود
$$Pr = \begin{cases} +P, & S_T \geq K \\ P + S_T - K, & S_T < K \end{cases}$$

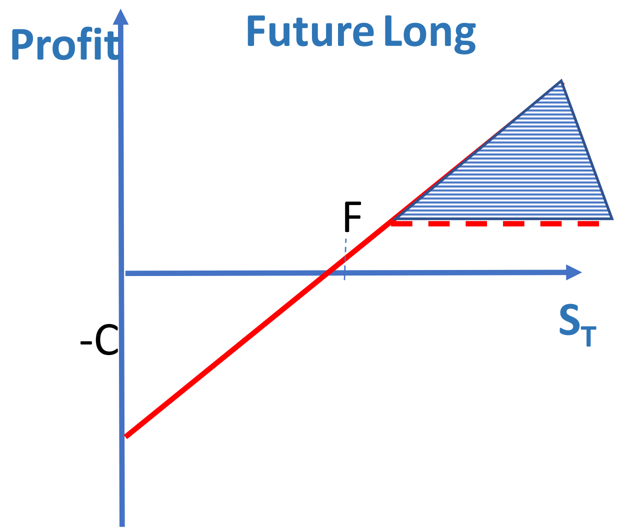
✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = P - K$

✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K - P$

دلیل انتخاب استراتژی صدور اختیار فروش

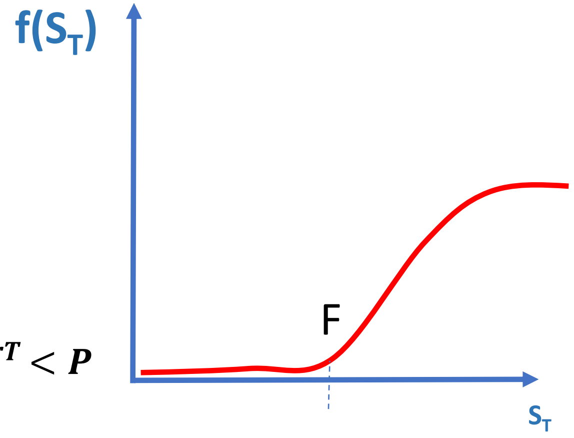






$$E(Prof).e^{-rT} < P => E(S_T|S_T > h) - K < P$$

$$E(\text{Prof}).e^{-rT} < P => (E(S_T|S_T > h) - K).e^{-rT} < P$$



استراتژی‌های ترکیبی

- ✓ شکاف عمودی (شکاف قیمتی) Vertical Spread

- ✓ استرادل‌ها Stradle

- ✓ استرانگل‌ها Strangles

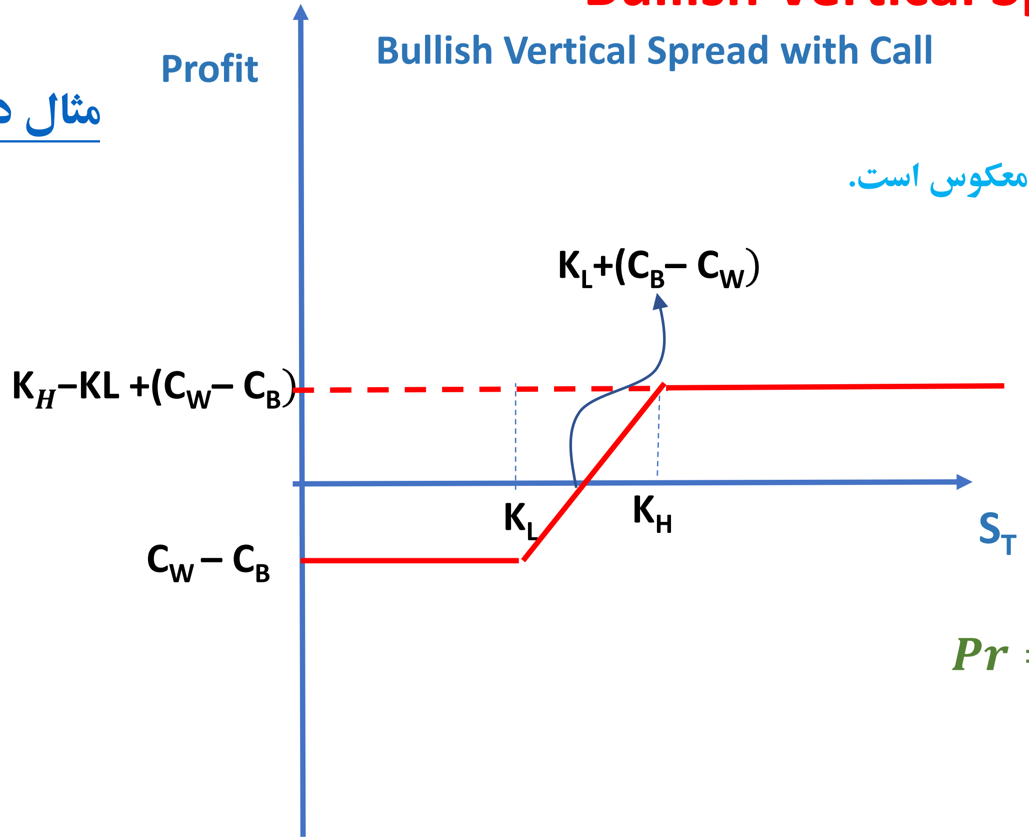
- ✓ خرید نقدی مصنوعی Synthetic Stock

دسته اول: شکاف عمودی (شکاف قیمتی)

- ✓ شکاف قیمتی اختیار خرید در بازار نزولی
- ✓ شکاف قیمتی اختیار فروش در بازار نزولی
- ✓ شکاف قیمتی اختیار خرید در بازار صعودی
- ✓ شکاف قیمتی اختیار فروش در بازار صعودی

شکاف قیمتی صعودی با اختیار خرید

Bullish Vertical Spread with Call

[مثال در اکسل]

- ✓ خرید اختیار خرید با K_L C_B

در اختیار خرید رابطه قیمت توافقی و قیمت اختیار معکوس است.

- ✓ صدور اختیار خرید با K_H C_W

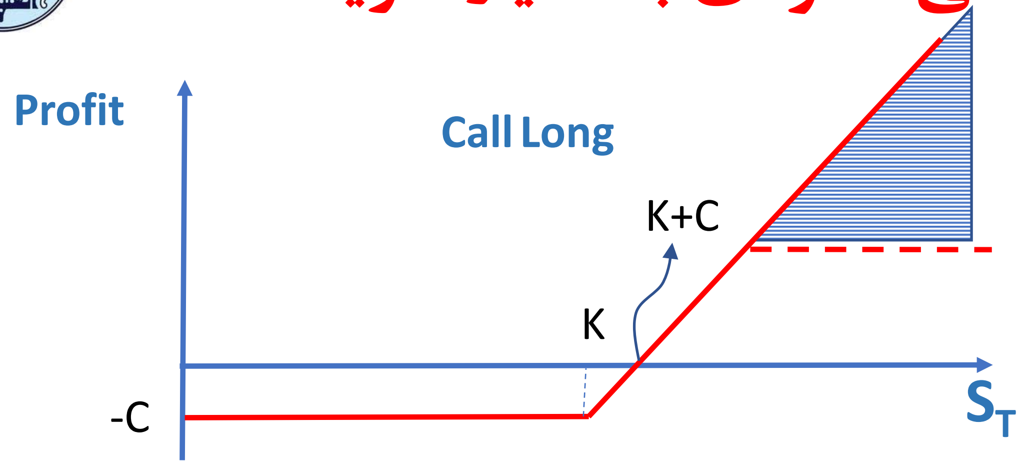
- ✓ معادله مادر $Pr= C_W - C_B+(S_T -K_L)-(S_T -K_H)$

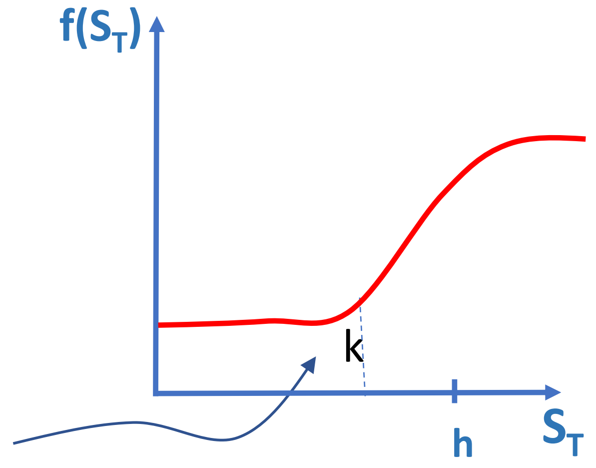
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} C_W - C_B, & S_T \le K_L \\ C_W - C_B + S_T - K_L, & K_L < S_T \le K_H \\ C_W - C_B - K_L + K_H, & S_T > K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = C_W - C_B$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K_L+(C_B - C_W)$

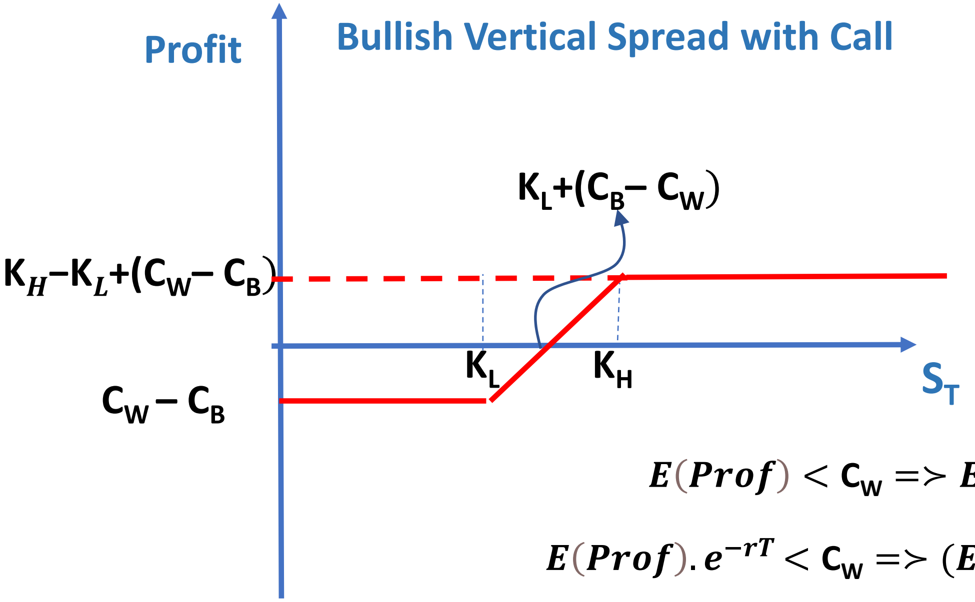
زمان انتخاب استراتژی شکاف قیمتی صعودی با اختیار خرید

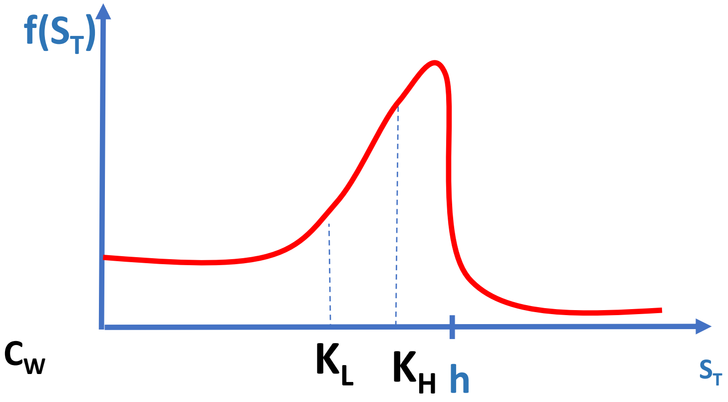




$$\int_0^K f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Loss) > C \Rightarrow E(S_T|S_T < F) - F > C$$





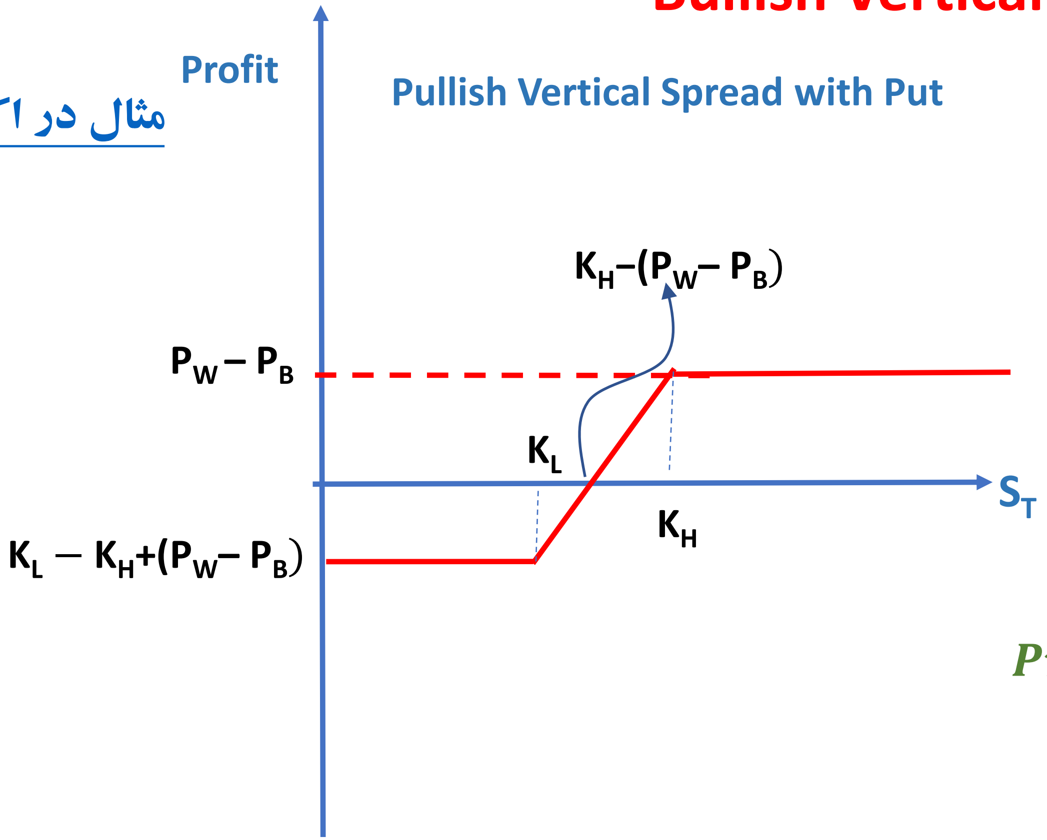
$$E(Prof) < C_W \Rightarrow E(S_T|S_T > h) - K < C_W$$

$$E(Prof).e^{-rT} < C_W \Rightarrow (E(S_T|S_T > h) - K).e^{-rT} < C_W$$

شکاف قیمتی صعودی با اختیار فروش

Bullish Vertical Spread with Put

[مثال در اکسل]

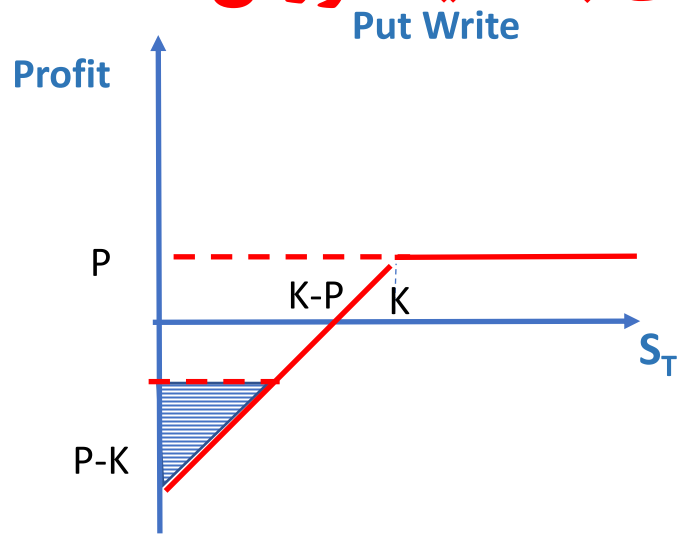


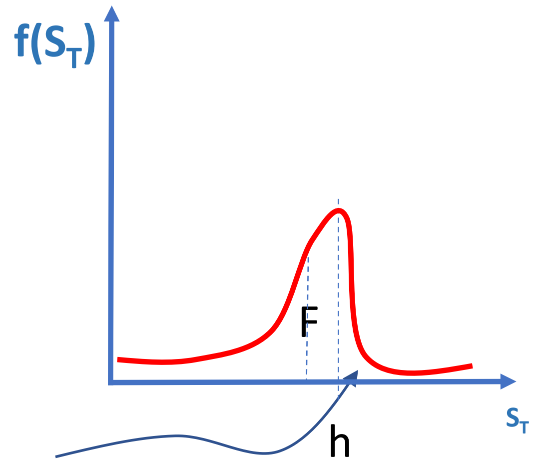
- ✓ صدور اختیار فروش با K_H P_W
- ✓ خرید اختیار فروش با K_L P_B
- ✓ معادله مادر $Pr= P_W-P_B+(K_L-S_T)-(K_H-S_T)$
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} P_W - P_B + K_L - K_H, & S_T < K_L \\ P_W - P_B + S_T - K_H, & K_L \leq S_T < K_H \\ P_W - P_B, & S_T \geq K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = P_W - P_B - K_L + K_H$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K_H - (P_W - P_B)$

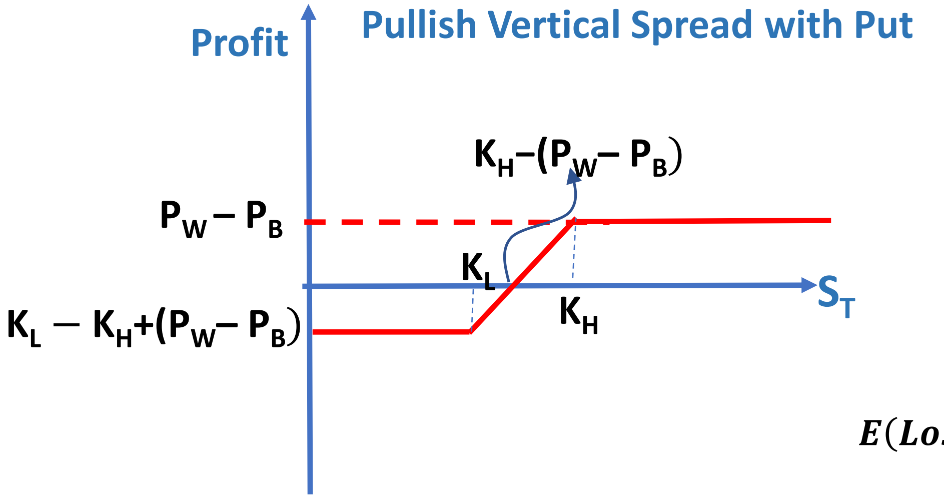
زمان انتخاب استراتژی شکاف قیمتی صعودی با اختیار فروش





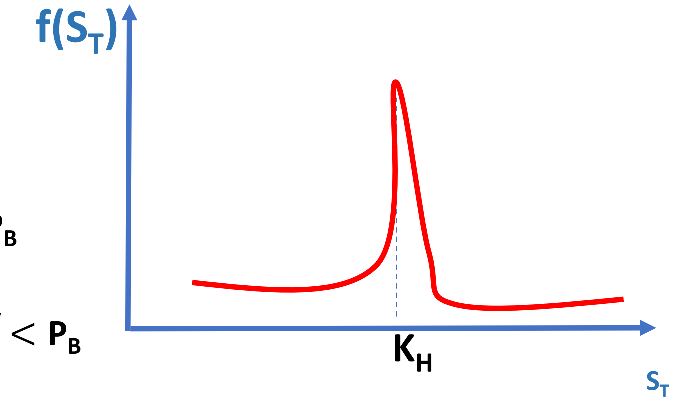
$$\int_h^{\infty} f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Prof).e^{-rT} < P \Rightarrow E(S_T|S_T > h) - K < P$$



$$E(Loss) > P_B \Rightarrow K - E(S_T|S_T < K_L) > P_B$$

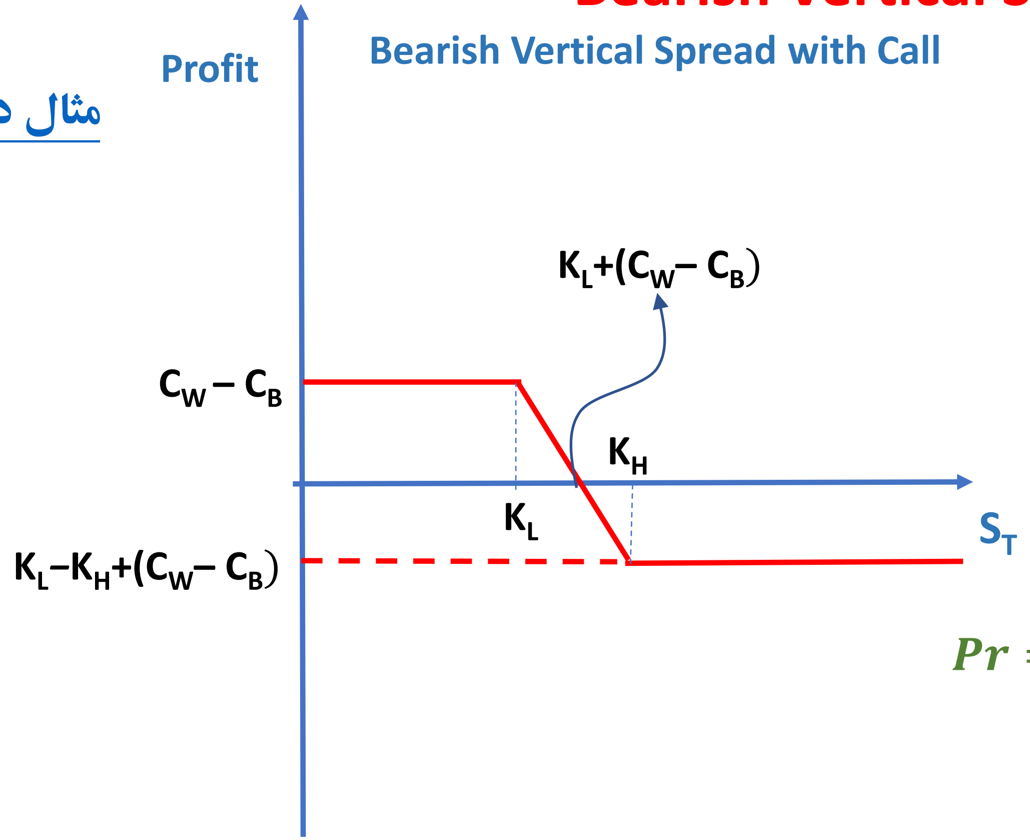
$$E(Loss).e^{-rT} < P_w \Rightarrow (K - E(S_T|S_T < h)).e^{-rT} < P_B$$



شکاف قیمتی نزولی با اختیار خرید

Bearish Vertical Spread with Call

مثال در اکسل

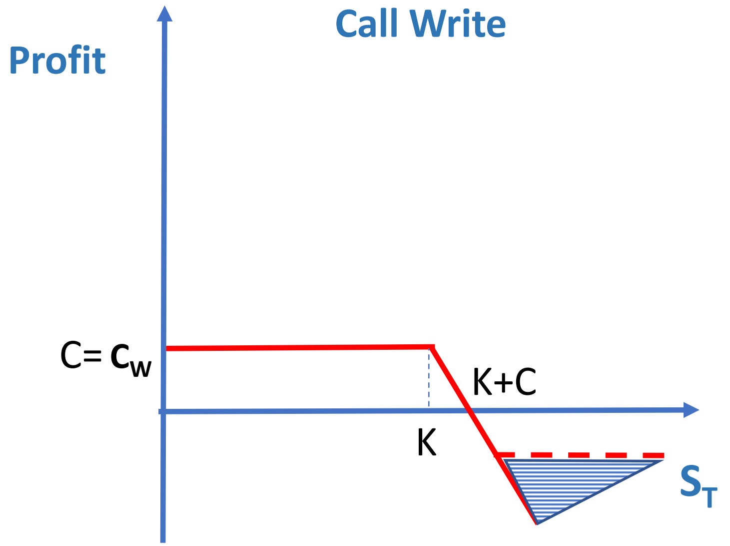


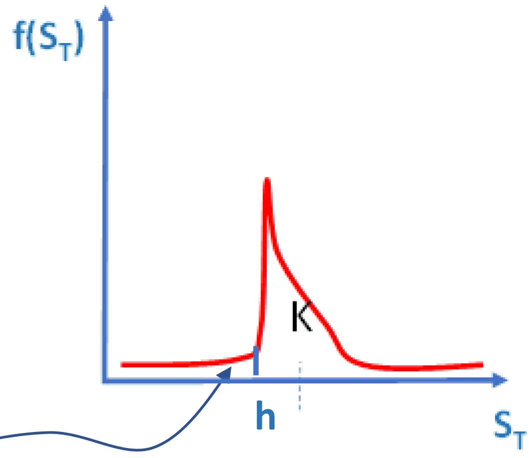
- ✓ صدور اختیار خرید با K_L C_W
- ✓ خرید اختیار خرید با K_H C_B
- ✓ معادله مادر $Pr = C_W - C_B - (S_T - K_L) + (S_T - K_H)$
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} C_W - C_B, & S_T \le K_L \\ C_W - C_B - S_T + K_L, & K_L < S_T \le K_H \\ C_W - C_B + K_L - K_H, & S_T > K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = C_W - C_B$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K_L + (C_W - C_B)$

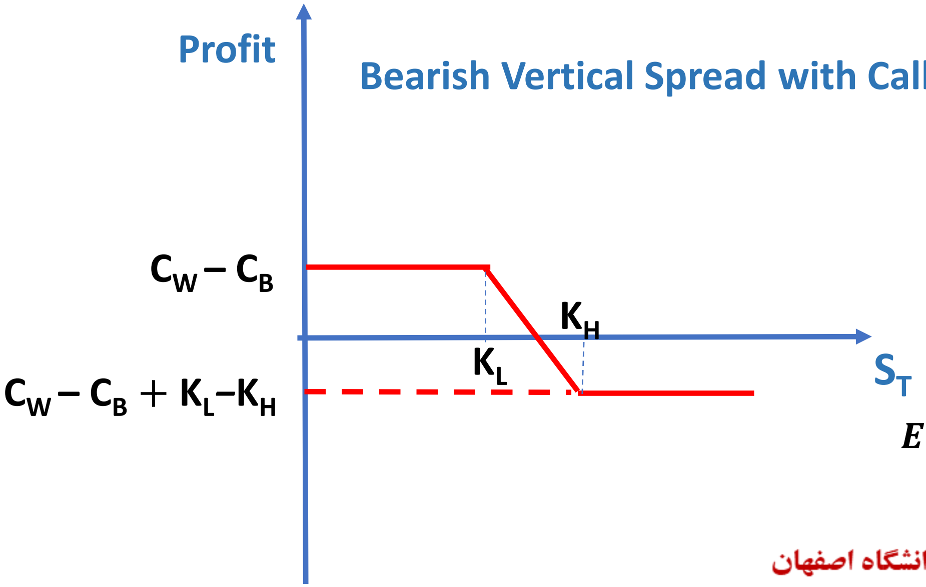
زمان انتخاب استراتژی شکاف قیمتی نزولی با اختیار خرید





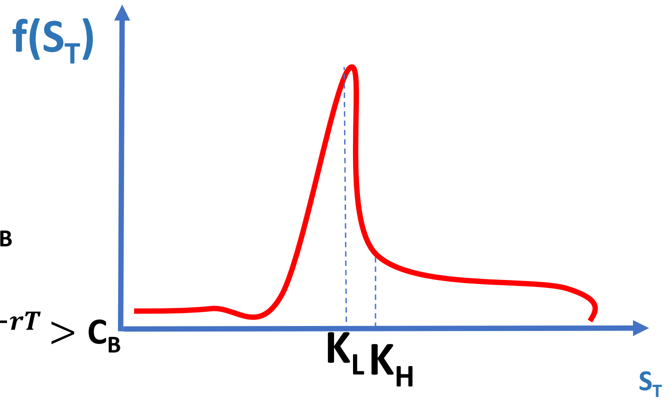
$$\int_0^h f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Prof) < C => -E(S_T|S_T < h) + K < C$$



$$E(Loss) > C_B => E(S_T|S_T > K_H) - K > C_B$$

$$E(Loss).e^{-rT} < P => (E(S_T|S_T > K_H) - K).e^{-rT} > C_B$$

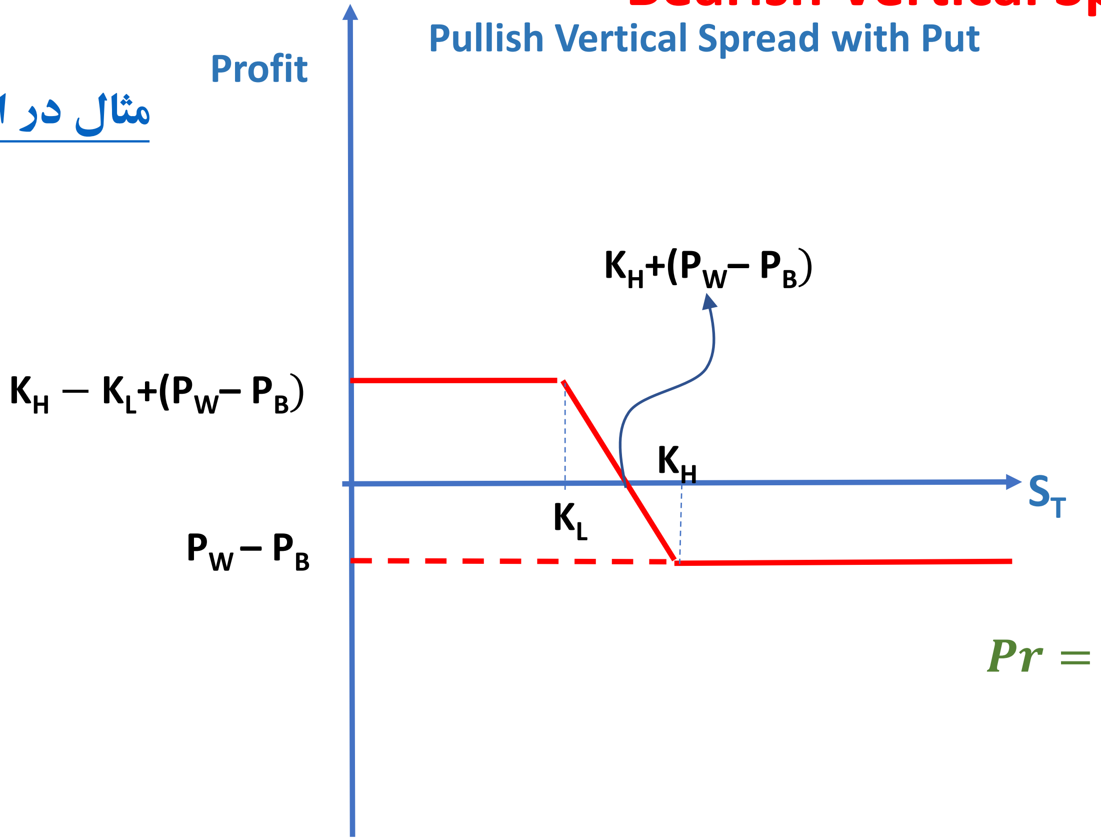


شکاف قیمتی نزولی با اختیار فروش

Bearish Vertical Spread with Put

Pullish Vertical Spread with Put

[مثال در اکسل]

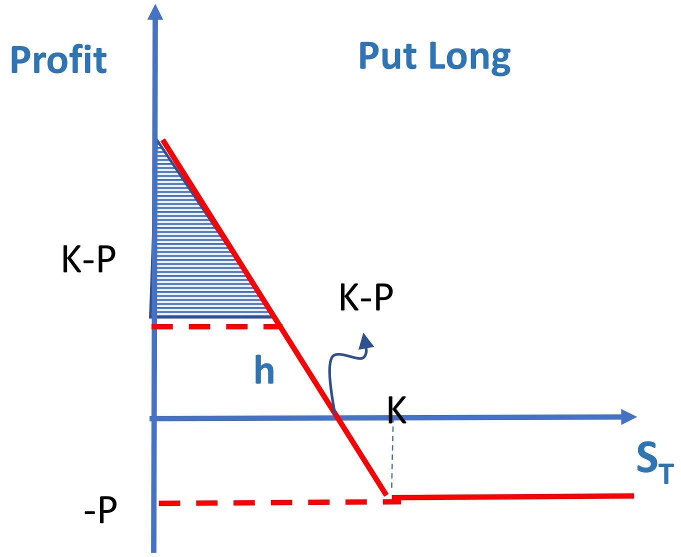


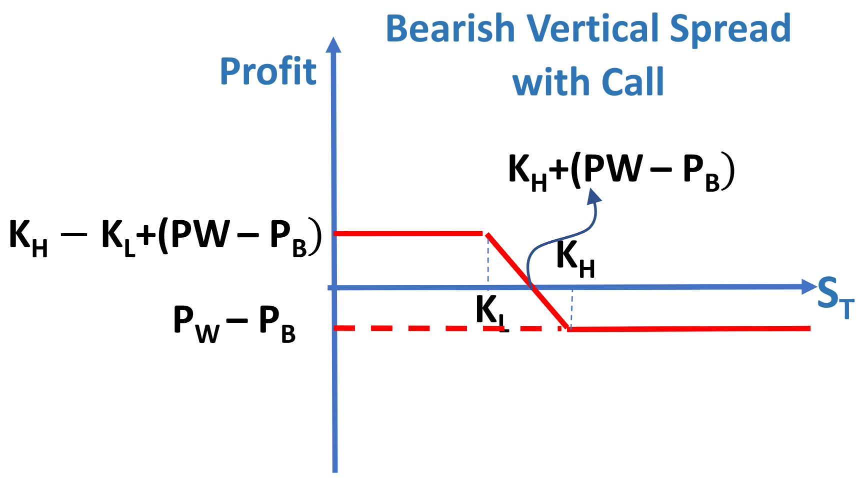
- ✓ خرید اختیار فروش با K_H P_B
- ✓ صدور اختیار فروش با K_L P_W
- ✓ معادله مادر $Pr = P_W - P_B - (K_L - S_T) + (K_H - S_T)$
- ✓ تابع سود

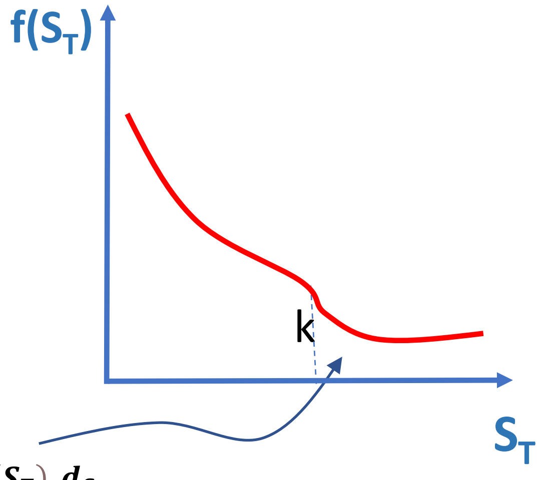
$$Pr = \begin{cases} P_W - P_B - K_L + K_H, & S_T < K_L \\ P_W - P_B - S_T + K_H), & K_L \le S_T < K_H \\ P_W - P_B, & S_T \ge K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = P_W - P_B + K_H$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K_H + (P_W - P_B)$

زمان انتخاب استراتژی شکاف قیمتی نزولی با اختیار فروش





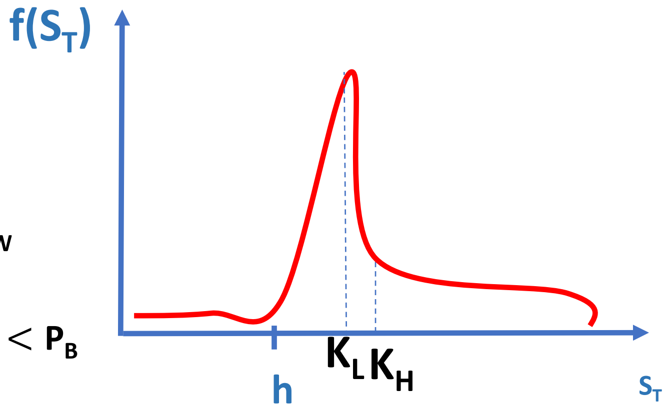


$$\int_K^{\infty} f(S_T).\, d_{S_T}$$

$$E(Loss) > P \Rightarrow -E(S_T|S_T > K) + K > P$$

$$E(Prof) < P_w \Rightarrow K - E(S_T|S_T < h) < P_W$$

$$E(Prof).\, e^{-rT} < P_w \Rightarrow \left(K - E(S_T|S_T < h)\right).\, e^{-rT} < P_B$$



دسته دوم: استرادل و استرانگل

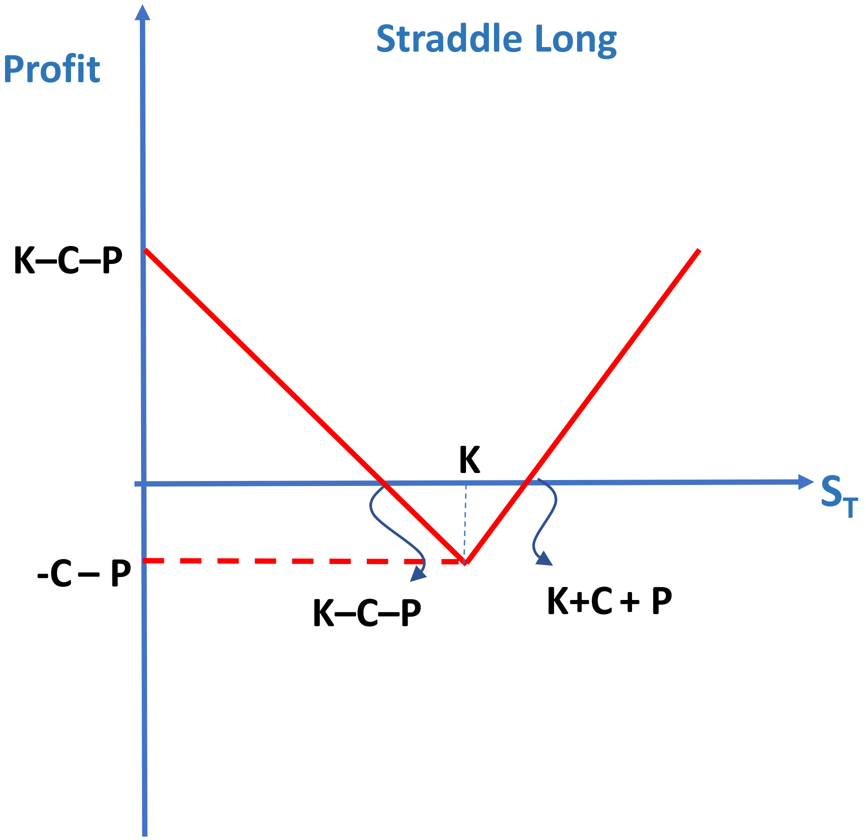
- ✓ شکاف صعودی با اختیار خرید به اختیار فروش ارجح است اگر: $K_H - KL + (CW - C_B) > P_W - P_B$
  - ✓ یا از ابتدا موقعیت خرید اختیار خرید داشته باشیم.
- ✓ شکاف صعودی با اختیار فروش به اختیار خرید ارجح است اگر: $K_H - KL + (CW - C_B) < P_W - P_B$
  - ✓ یا از ابتدا موقعیت صدور اختیار فروش داشته باشیم.
- ✓ شکاف نزولی با اختیار خرید به اختیار فروش ارجح است اگر: $K_H - K_L + (PW - P_B) < C_W - C_B$
  - ✓ یا از ابتدا موقعیت صدور اختیار خرید داشته باشیم.
- ✓ شکاف نزولی با اختیار فروش به اختیار خرید ارجح است اگر: $K_H - K_L + (PW - P_B) > C_W - C_B$
  - ✓ یا از ابتدا موقعیت خرید اختیار فروش داشته باشیم.

دسته دوم: استرادل و استرانگل

- ✓ خرید استرادل
- ✓ فروش استرادل
- ✓ خرید استرانگل
- ✓ فروش استرانگل

خرید استرادل
Straddle Long

مثال در اکسل

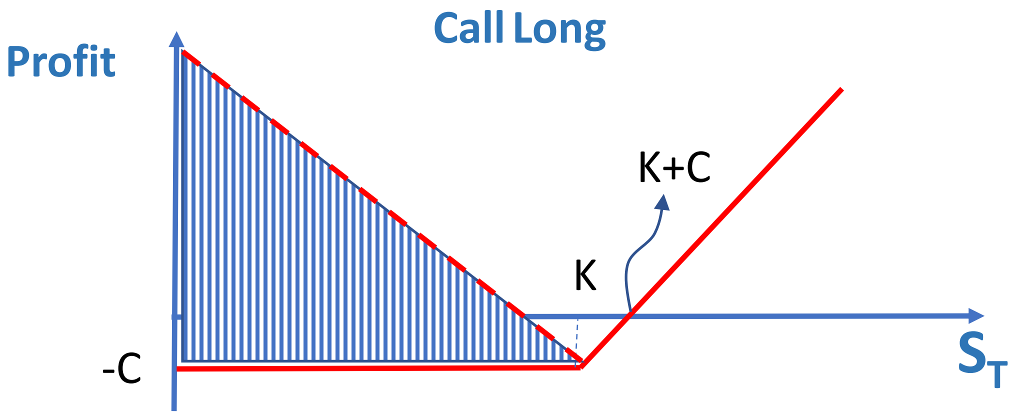


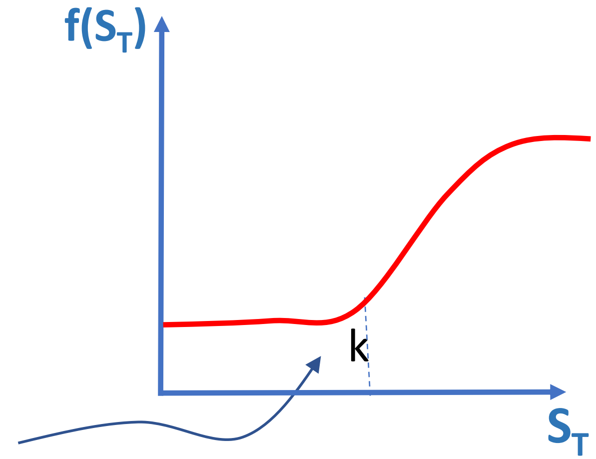
- ✓ خرید اختیار خرید با قیمت توافقی K و هزینه C
- ✓ خرید اختیار فروش با قیمت توافقی K و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr = -C - P + (K - S_T) + (S_T - K)$
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} -C - P + K - S_T, & S_T < K \\ -C - P + S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = K - C - P$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K + C + P),\ S_T = K - C - P$

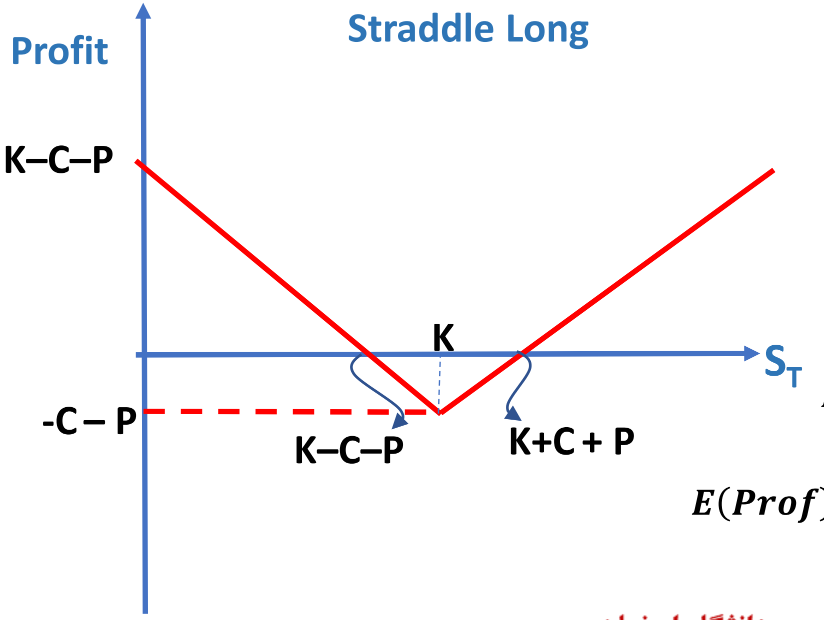
زمان انتخاب استراتژی خرید استرادل ۱





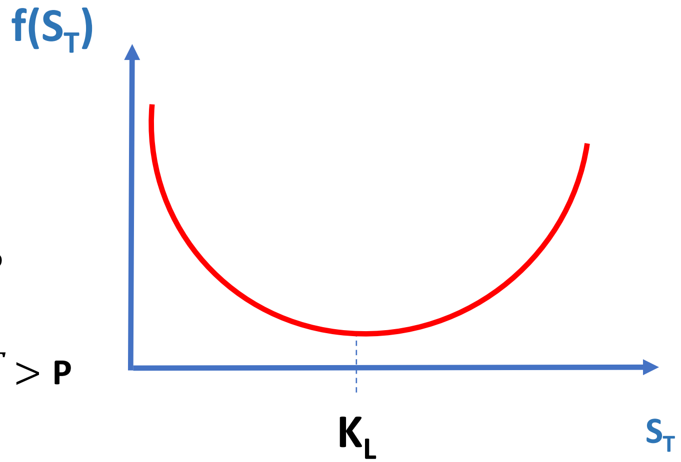
$\int_0^K f(S_T).d_{S_T}$

$E(Loss) > C => E(S_T|S_T < F) - F > C$

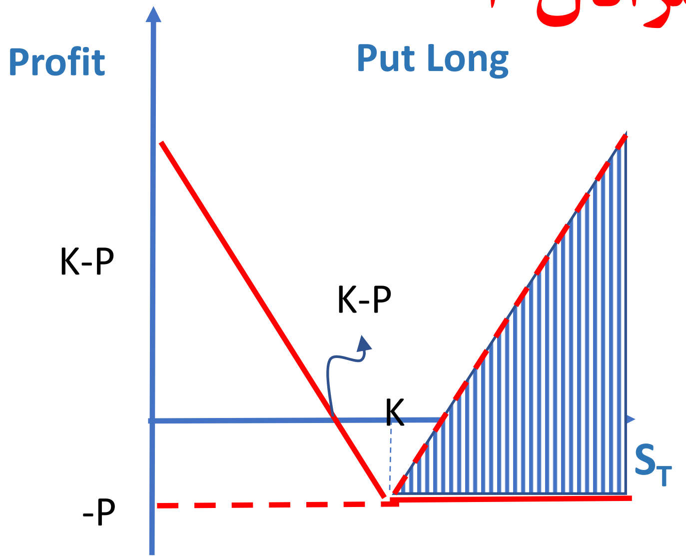


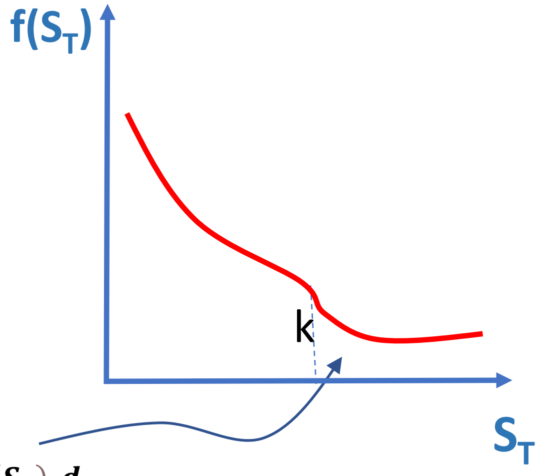
$E(Prof) > P => K - E(S_T|S_T < K) > P$

$E(Prof).e^{-rT} > P => \left(K - E(S_T|S_T < K)\right).e^{-rT} > P$



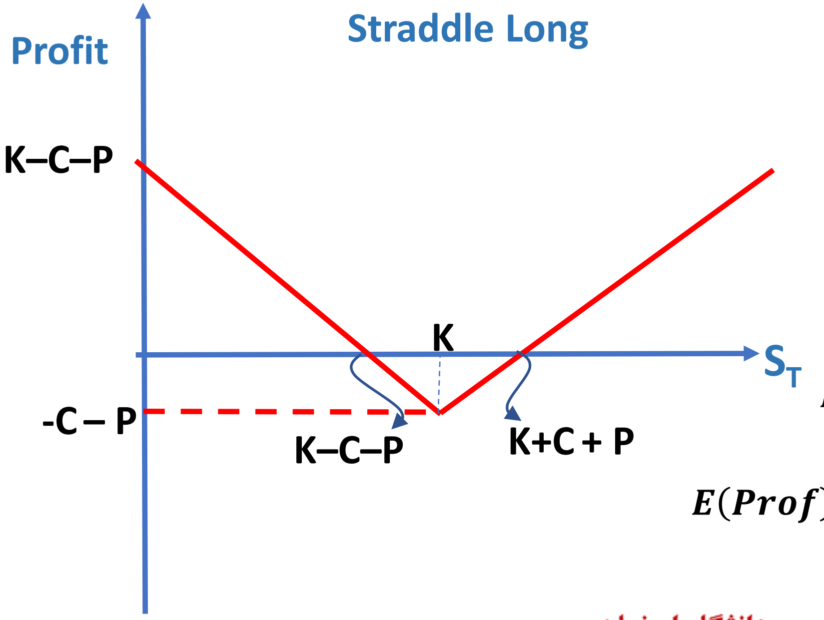
زمان انتخاب استراتژی خرید استرادل ۲





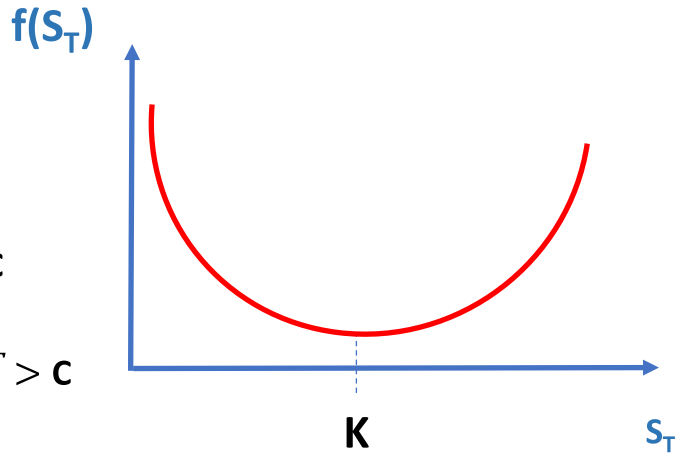
$$\int_K^\infty f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Loss) > P => -E(S_T|S_T > K) + K > P$$

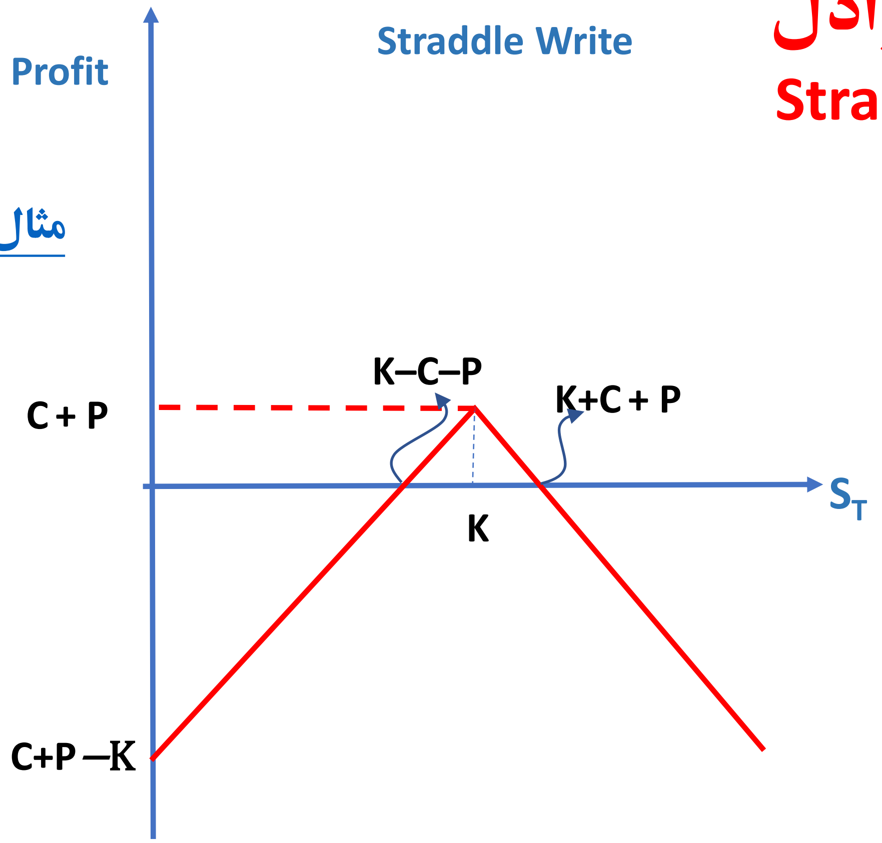


$$E(Prof) > C => E(S_T|S_T > K) - K > C$$

$$E(Prof).e^{-rT} > C => \left(K - E(S_T|S_T > h)\right).e^{-rT} > C$$



فروش استرادل
Straddle Write



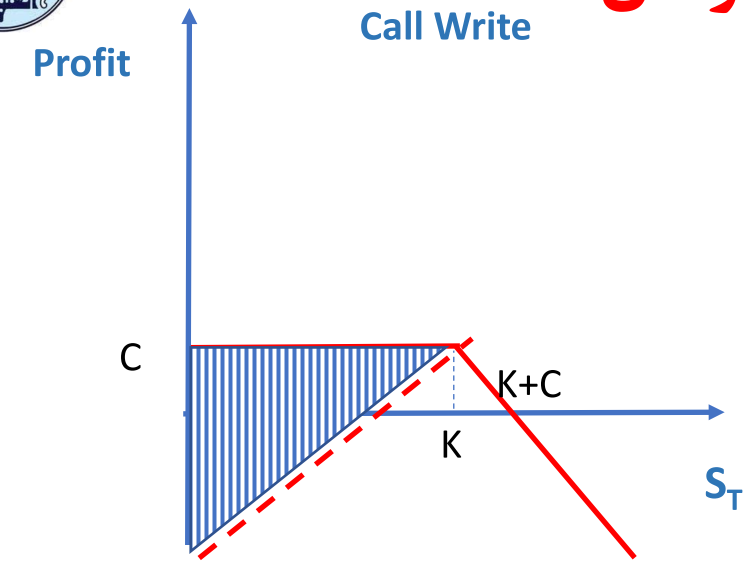
[مثال در اکسل]

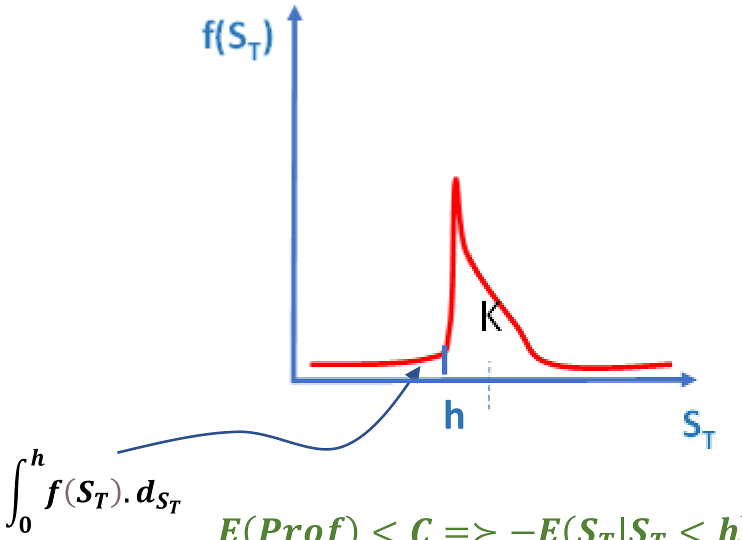
- ✓ صدور اختیار خرید با قیمت توافقی K و هزینه C
- ✓ صدور اختیار فروش با قیمت توافقی K و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr=C+P-(K-S_T)-(S_T-K)$
- ✓ تابع سود

$$Pr=\begin{cases} C+P-K+ST, & S_T<K \\ C+P-ST+K, & S_T>K \end{cases}$$

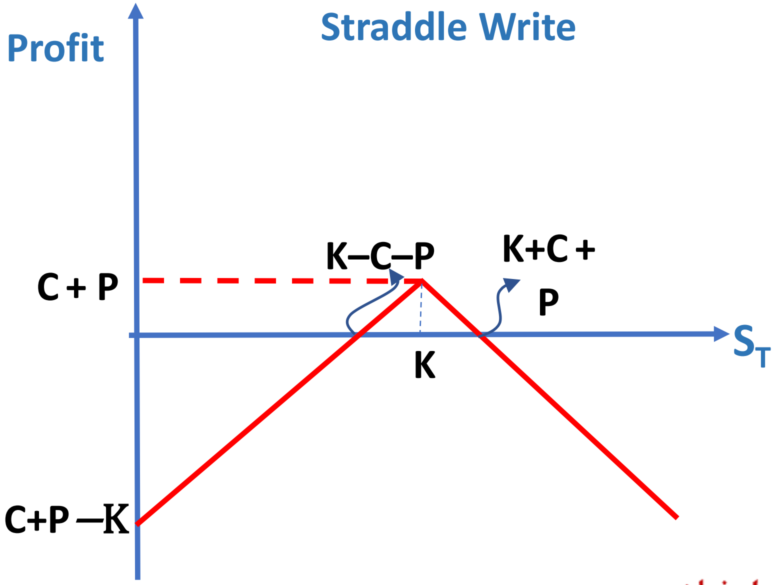
- ✓ $S_T=0 \Rightarrow Pr=C+P-K$
- ✓ $Pr=0 \Rightarrow S_T=K+C+P,\ S_T=K-C-P$

زمان انتخاب استراتژی فروش استرادل ۱



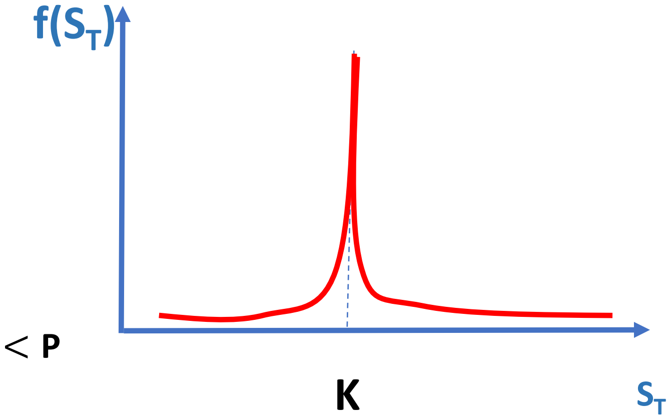


$$E(Prof) < C => -E(S_T|S_T < h) + K < C$$

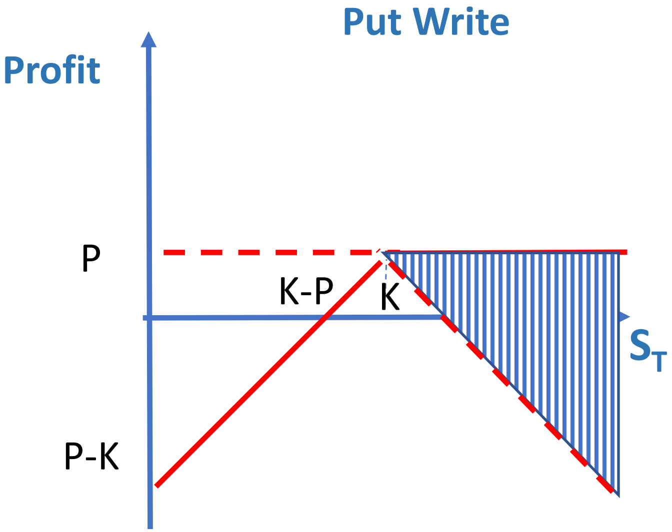


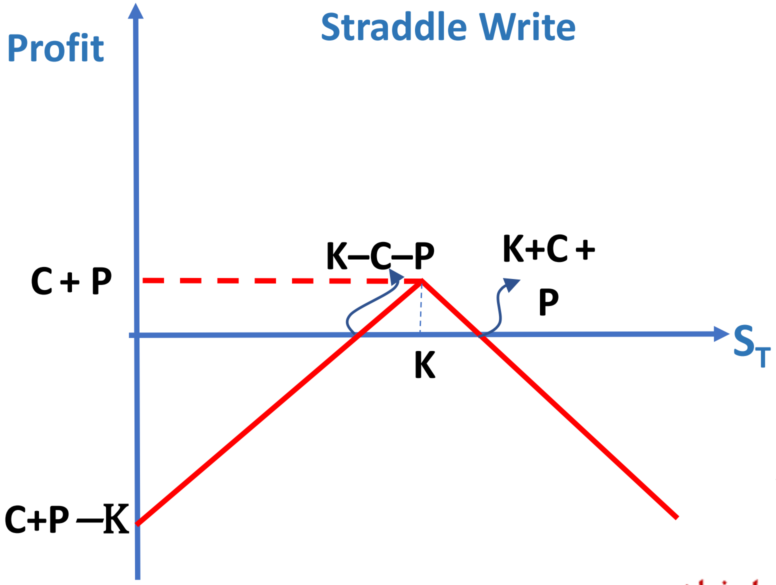
$$E(Loss) < P => E(S_T|S_T < K) - K < P$$

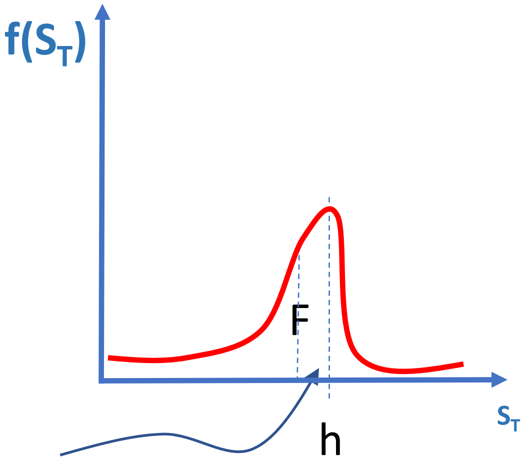
$$E(Loss).e^{-rT} < P => (E(S_T|S_T < K) - K).e^{-rT} < P$$



زمان انتخاب استراتژی فروش استرادل ۲

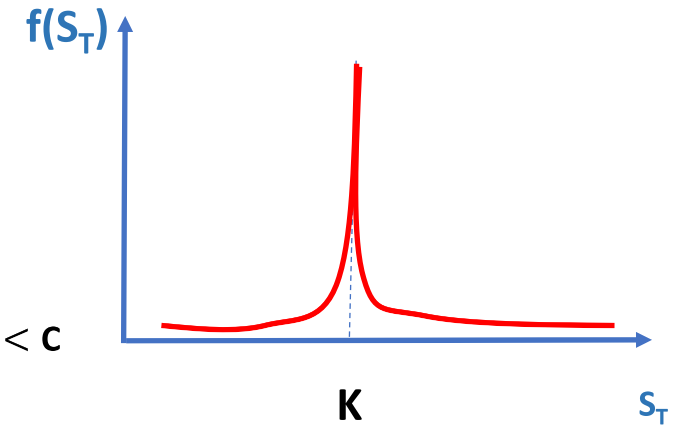






$$\int_h^\infty f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Prof).e^{-rT} < P => E(S_T|S_T > h) - K < P$$



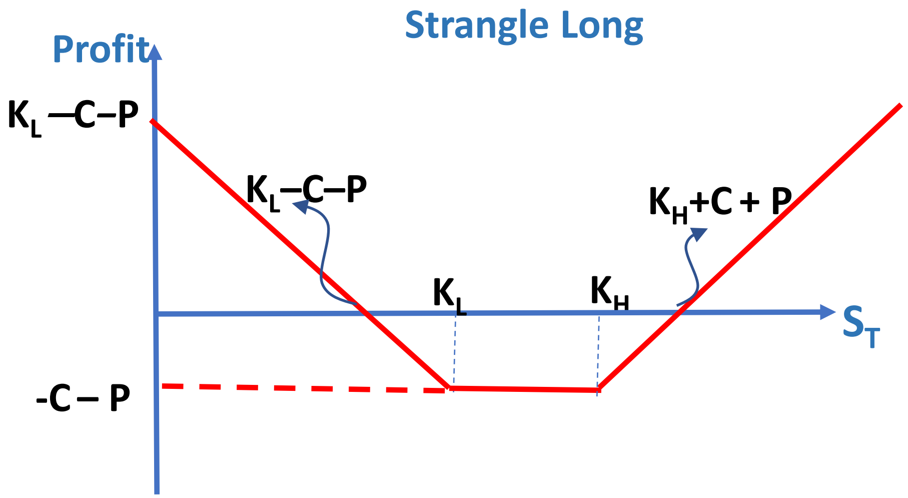
$$E(\text{Loss}) < C => K - E(S_T|S_T > K) < C$$

$$E(Loss).e^{-rT} < C => \left(K - E(S_T|S_T > K)\right).e^{-rT} < C$$

خرید استرانگل
Strangle Long

[مثال در اکسل]

- ✓ خرید اختیار خرید با قیمت توافقی K_H و هزینه C
- ✓ خرید اختیار فروش با قیمت توافقی K_L و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr= -C-P+(K_L-S_T)+(S_T-K_H)$

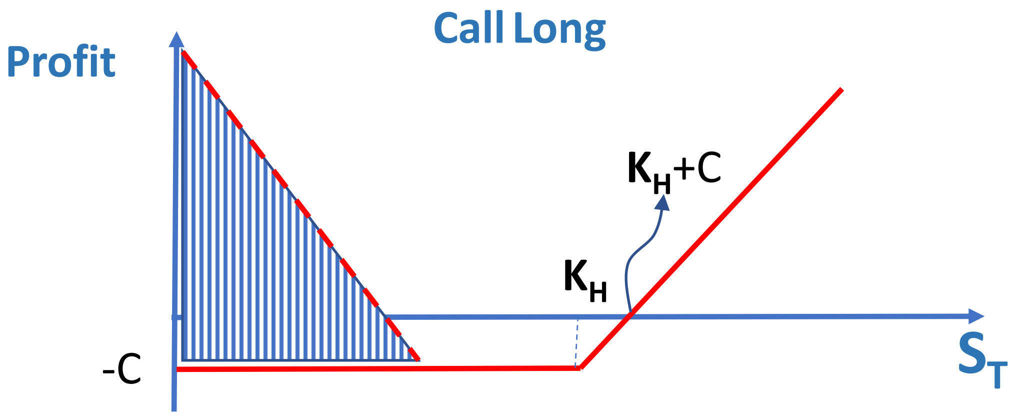


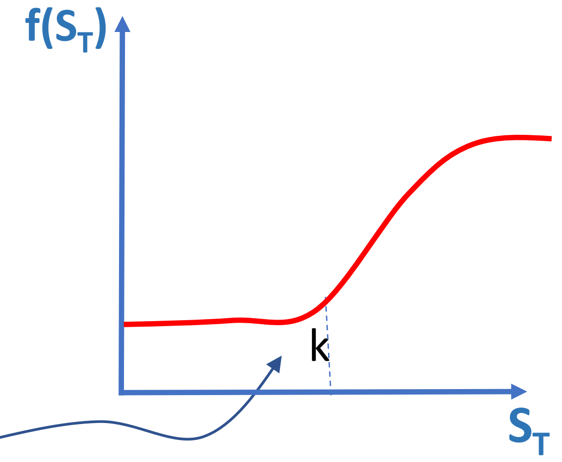
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} -C-P+K_L-S_T, & S_T < K_L \\ -C-P, & K_L \le S_T \le K_H \\ -C-P+S_T-K_H, & S_T > K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = K_L - C - P$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = K_H + C + P), S_T = K_L - C - P$

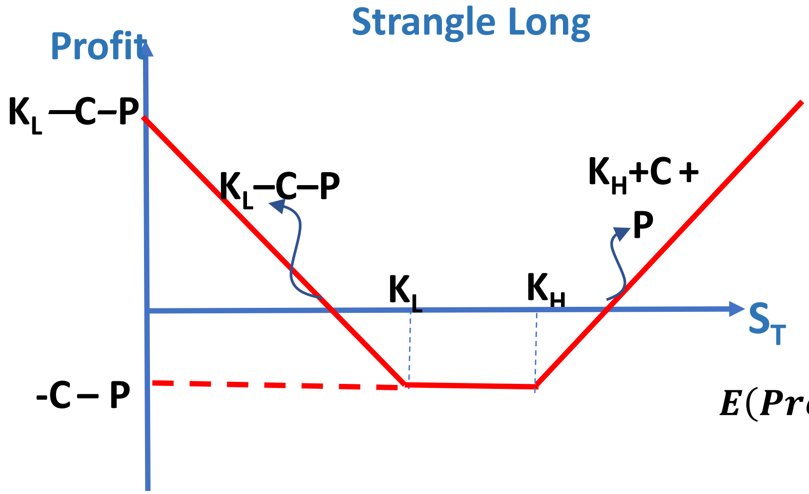
زمان انتخاب استراتژی خرید استرانگل ۱





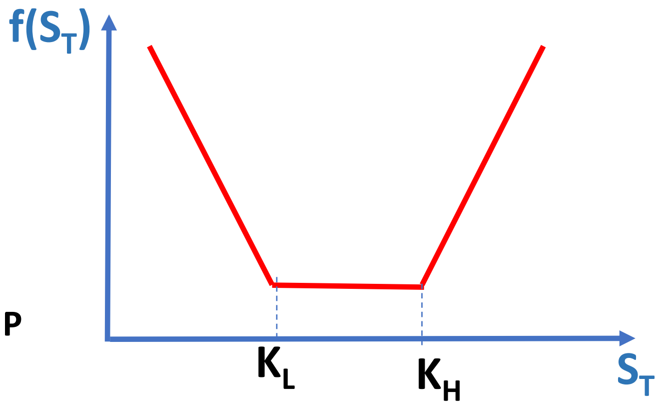
$$\int_0^K f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Loss) > C => E(S_T|S_T < F) - \mathrm{F} > C$$

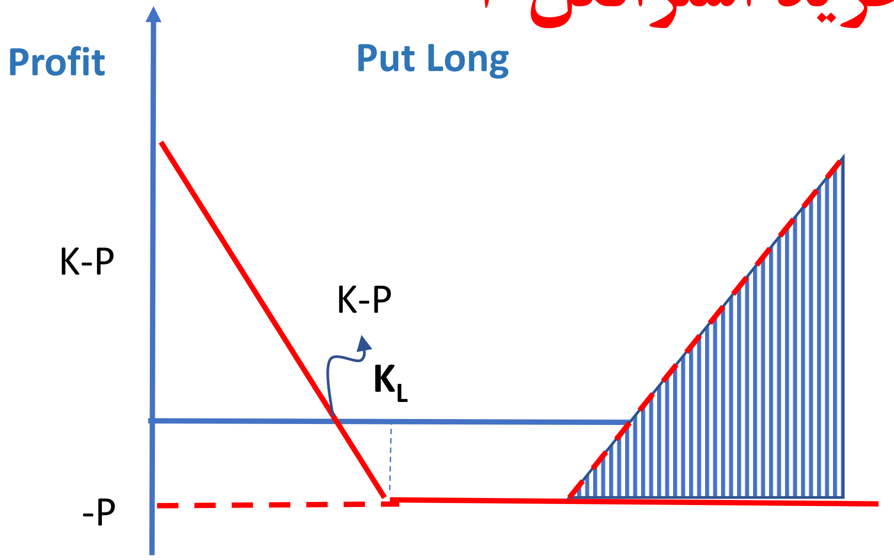


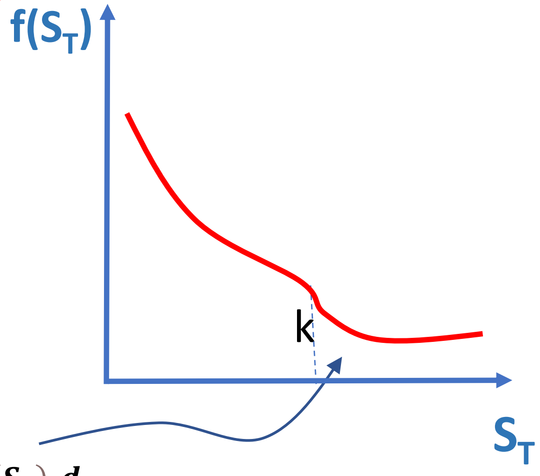
$$E(Prof) > \mathrm{P} => \mathrm{K_L} - E(S_T|S_T < \mathrm{K_L}) > \mathrm{P}$$

$$E(Prof).e^{-rT} > \mathrm{P} => \left(\mathrm{K_L} - E(S_T|S_T < \mathrm{K_L})\right).e^{-rT} > \mathrm{P}$$



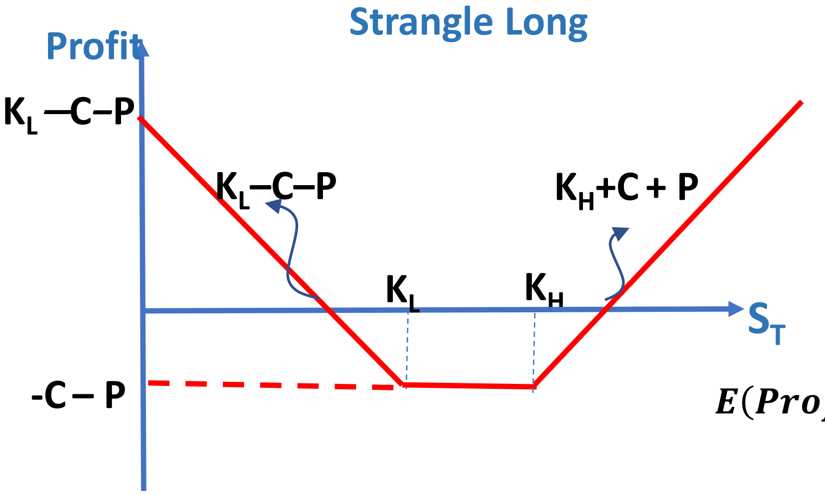
زمان انتخاب استراتژی خرید استرانگل ۲





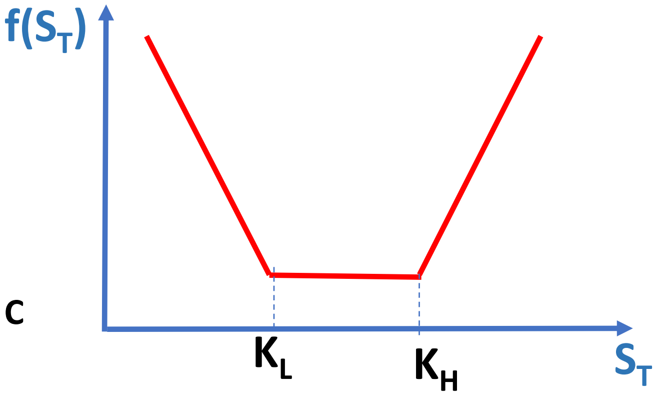
$$\int_K^{\infty} f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Loss) > P => -E(S_T|S_T > K) + K > P$$



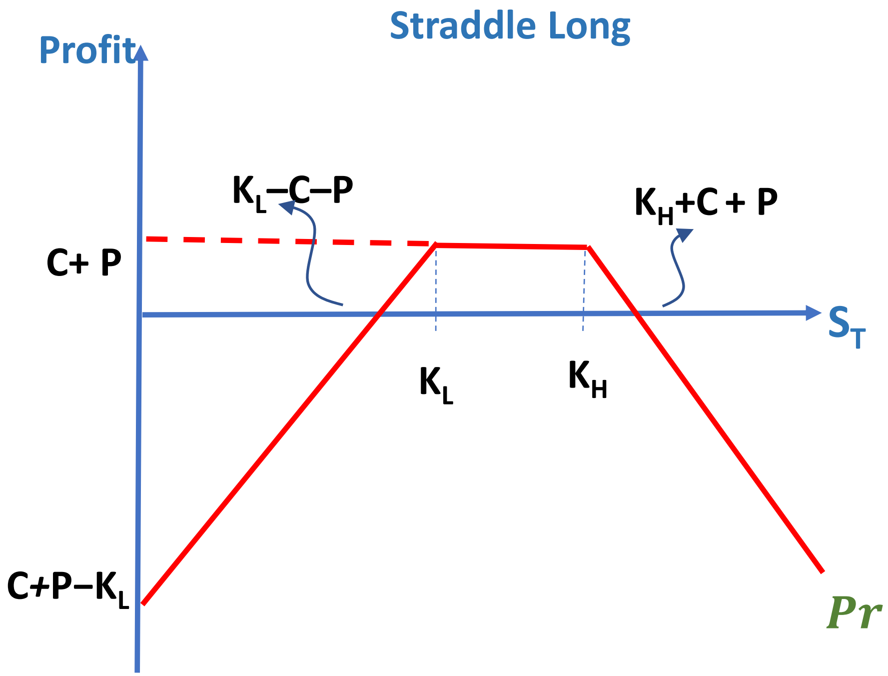
$$E(Prof) > C => E(S_T|S_T > K_H) - K_H > C$$

$$E(Prof).e^{-rT} > C => (E(S_T|S_T > K_H) - K_H).e^{-rT} > C$$



فروش استرانگل
Strangle Write

[مثال در اکسل]()



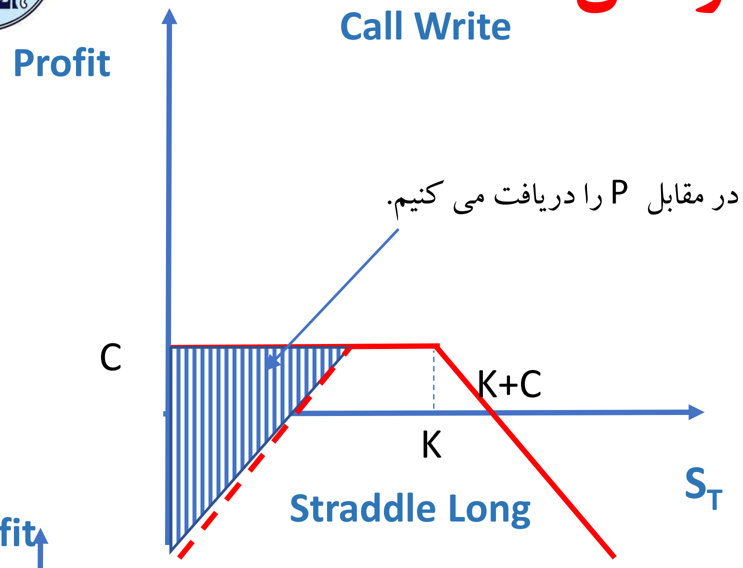
- ✓ صدور اختیار خرید با قیمت توافقی K_H و هزینه C
- ✓ صدور اختیار فروش با قیمت توافقی K_L و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr=C+P-(K_L-S_T)-(S_T-K_H)$
- ✓ تابع سود

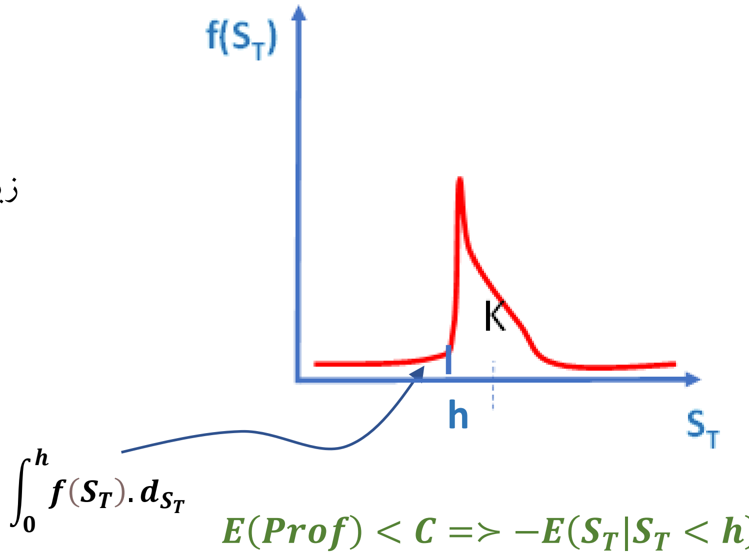
$$Pr=\begin{cases} C+P-K_L+S_T, & S_T<K_L \\ C+P, & K_L\le S_T\le K_H \\ C+P-S_T+K_H, & S_T>K_H \end{cases}$$

- ✓ $S_T=0 \Rightarrow Pr=C+P-K_L$
- ✓ $Pr=0 \Rightarrow S_T=K+C+P,\ S_T=K-C-P$

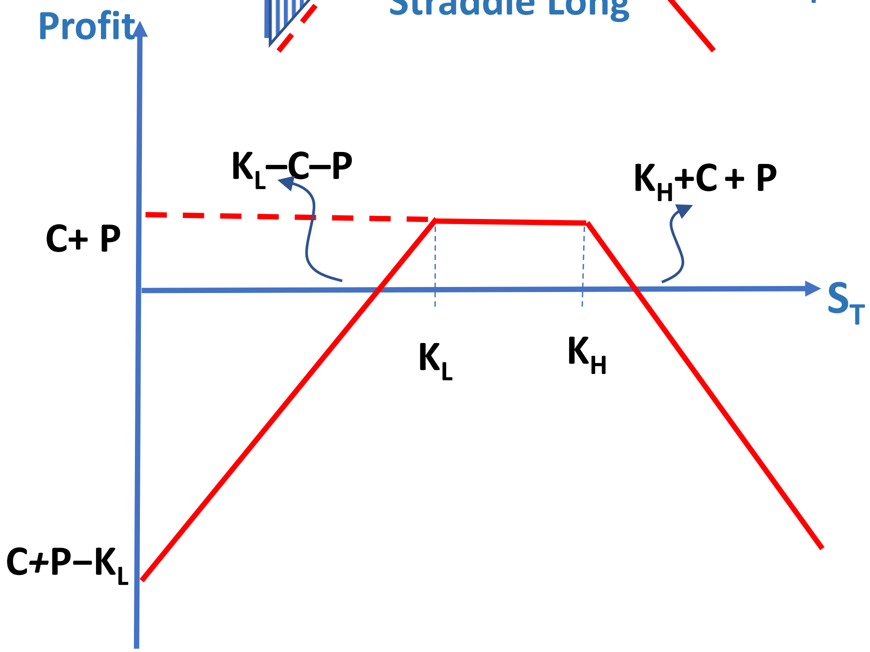
زمان انتخاب استراتژی فروش استرانگل ۱

زیانی که می دانیم محقق نمی شود را به خود می خریم و در مقابل P را دریافت می کنیم.

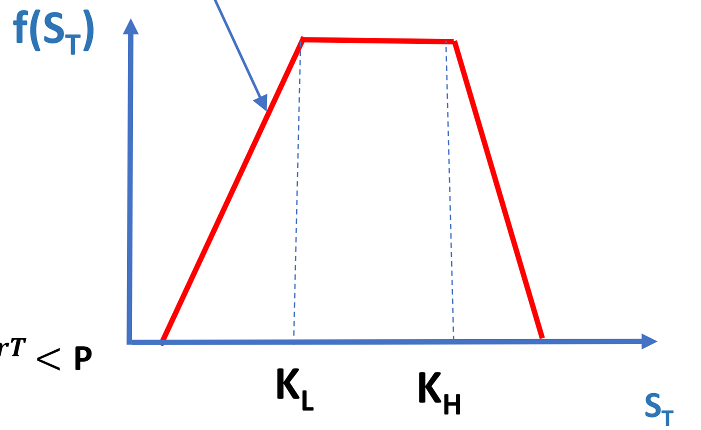




$$E(Prof) < C \Rightarrow -E(S_T|S_T < h) + K < C$$



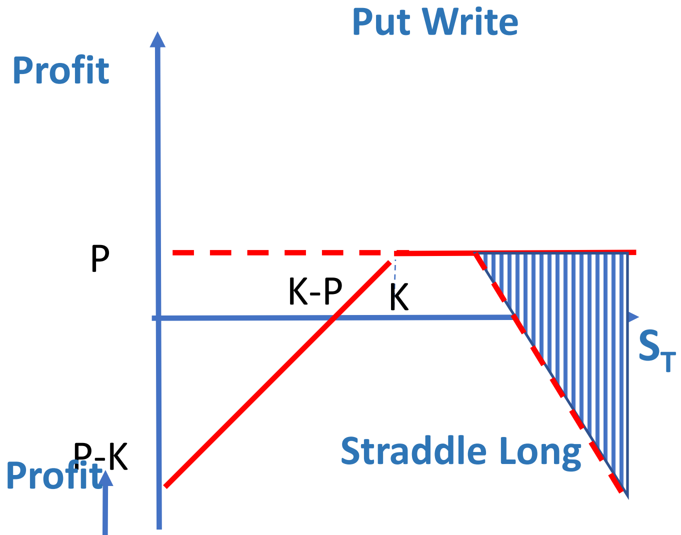
تا یک فاصله ای رو به صفر احتمال بالا می ماند بعد کاهش می یابد. این فاصله دامنه را می سازد.

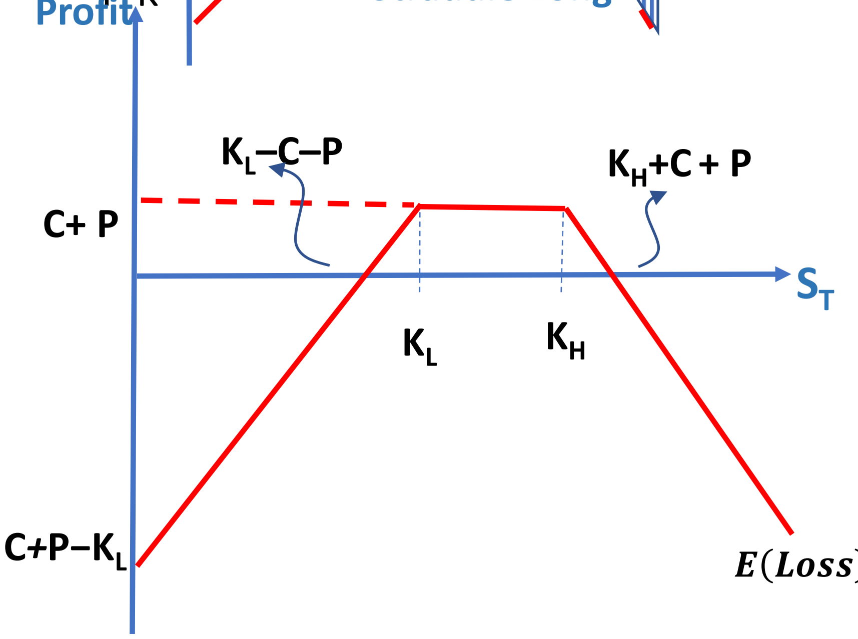


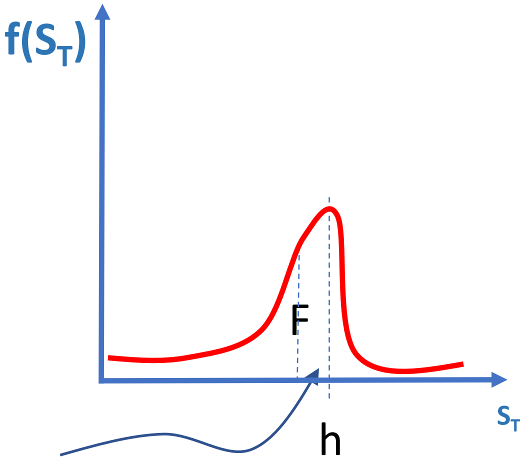
$$E(Loss) < P \Rightarrow E(S_T|S_T < K_L) - K_L < P$$

$$E(Loss).\,e^{-rT} < P \Rightarrow (E(S_T|S_T < K_L) - K_L).\,e^{-rT} < P$$

زمان انتخاب استراتژی فروش استرانگل ۲





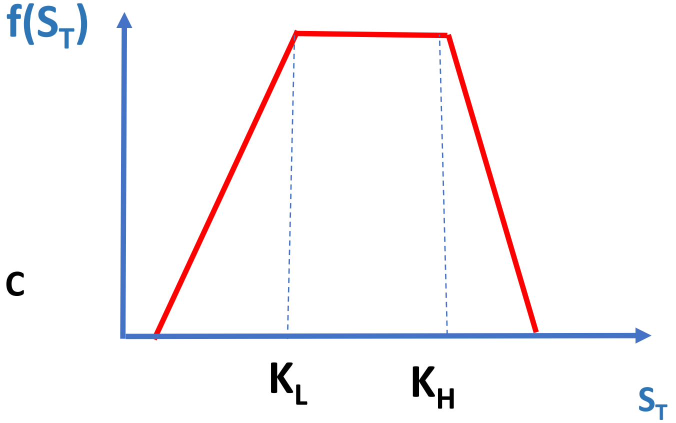


$$\int_h^{\infty} f(S_T).d_{S_T}$$

$$E(Prof).e^{-rT} < P => E(S_T|S_T > h) - K < P$$

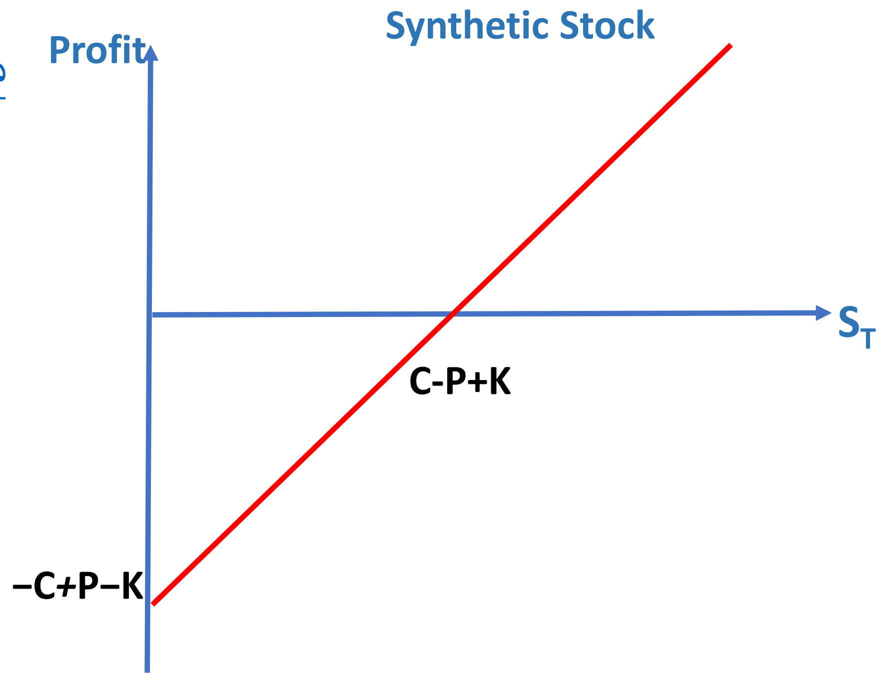
$$E(\text{Loss}) > \text{C} => \text{K}_\text{H} - E(S_T|S_T > \text{K}_\text{H}) < \text{C}$$

$$E(Loss).e^{-rT} > \text{C} => \left(\text{K}_\text{H} - E(S_T|S_T > \text{K}_\text{H})\right).e^{-rT} < \text{C}$$



خرید نقدی مصنوعی
Synthetic Stock

[مثال در اکسل](#)

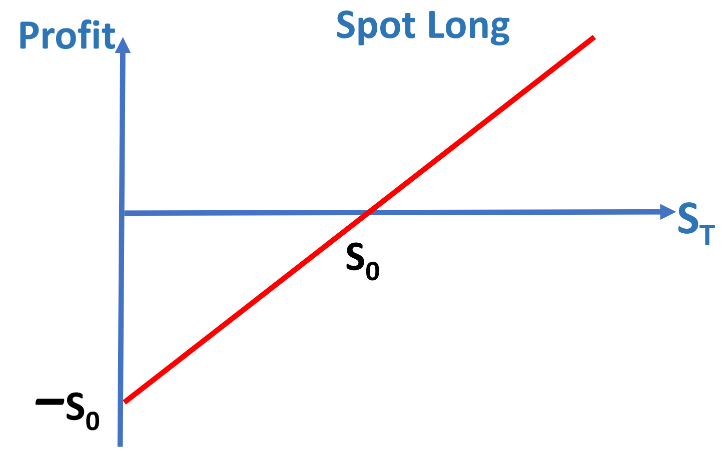


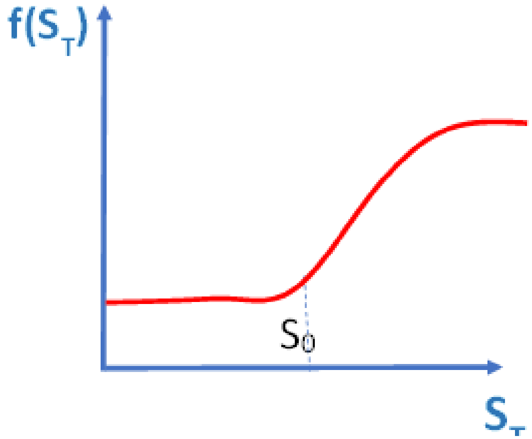
- ✓ خرید اختیار خرید با قیمت توافقی K و هزینه C
- ✓ صدور اختیار فروش با قیمت توافقی K و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr=-C+P-(K-S_T)+(S_T-K)$
- ✓ تابع سود

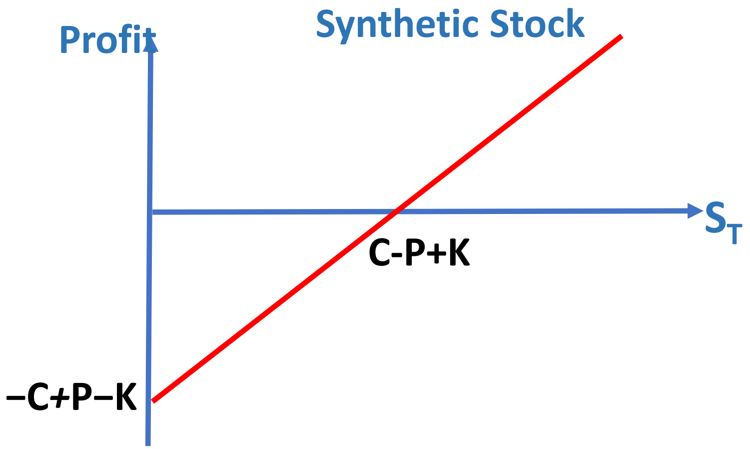
$$Pr=\begin{cases}-C+P-K+S_T, & S_T<K\\ -C+P+S_T-K, & S_T>K\end{cases}$$

- ✓ $S_T=0 \Rightarrow Pr=-C+P-K$
- ✓ $Pr=0 \Rightarrow S_T=C-P+K,$

زمان انتخاب استراتژی خرید مصنوعی سهام







K=110

S_0=110

C=22

P=25

S_T=150

Spot Profit= S_T-S_0 =150-110=40

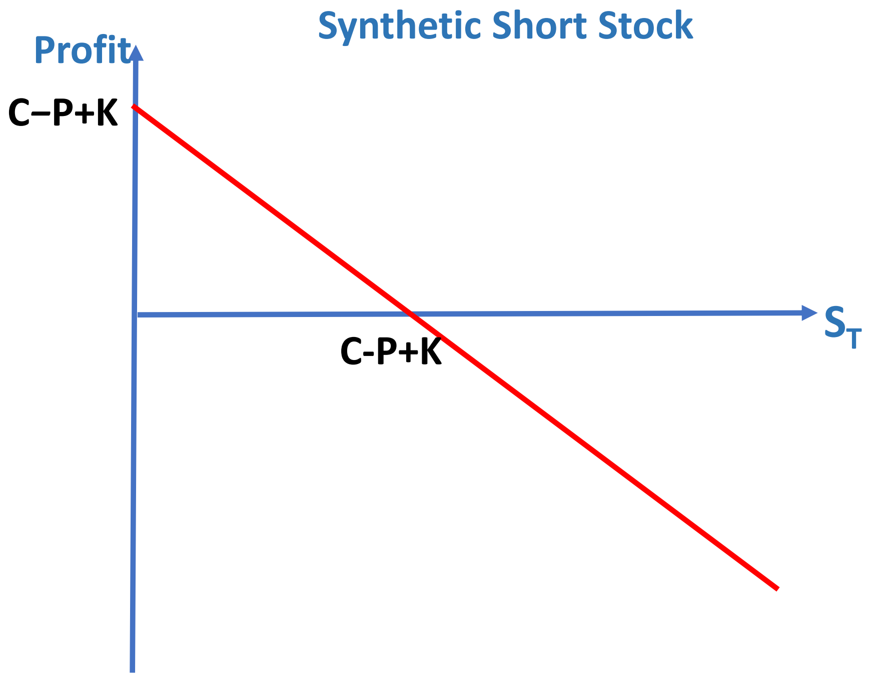
Spot Return=S_T/S_0 -1=150/110-1=36%

Synthetic Profit=-C+P+S_T–k=-22+25+150-110=43

Synthetic Profit=(S_T –k)/(-C+P)-1=40/3-1=1233%

فروش استقراضی مصنوعی
Synthetic Short Stock

مثال در اکسل



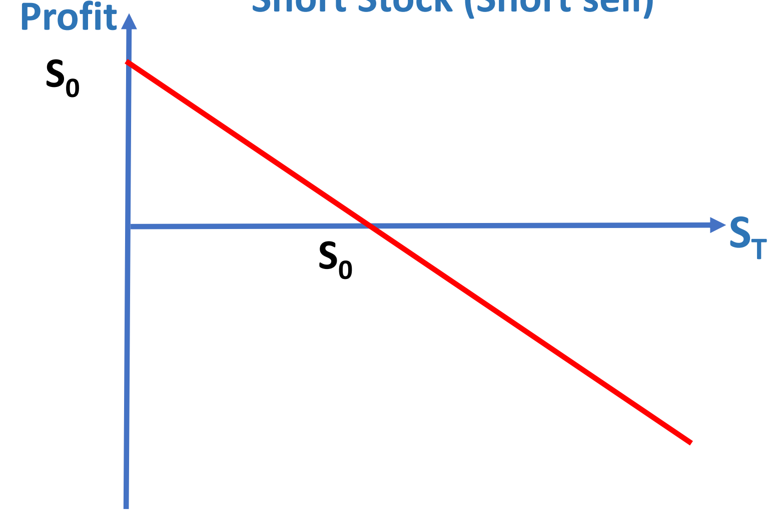
- ✓ صدور اختیار خرید با قیمت توافقی K و هزینه C
- ✓ خرید اختیار فروش با قیمت توافقی K و هزینه P
- ✓ معادله مادر $Pr = C - P + (K - S_T) - (S_T - K)$
- ✓ تابع سود

$$Pr = \begin{cases} C - P + K - S_T, & S_T < K \\ C - P - S_T + K, & S_T > K \end{cases}$$

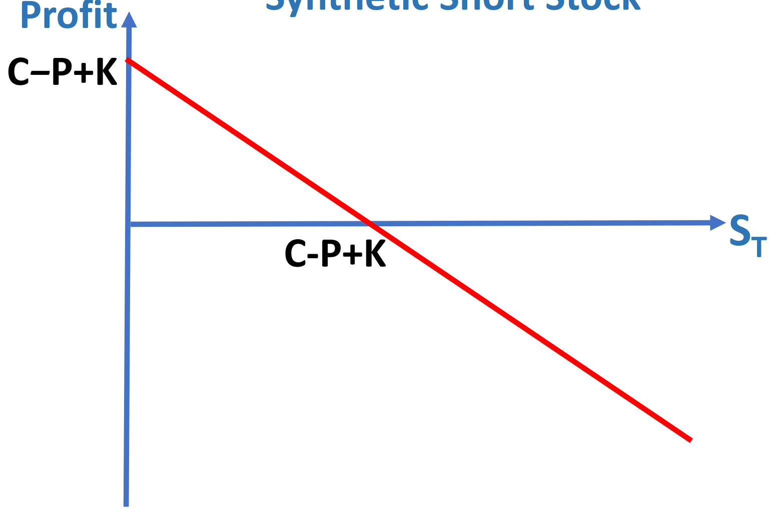
- ✓ $S_T = 0 \Rightarrow Pr = C - P + K$
- ✓ $Pr = 0 \Rightarrow S_T = C - P + K,$

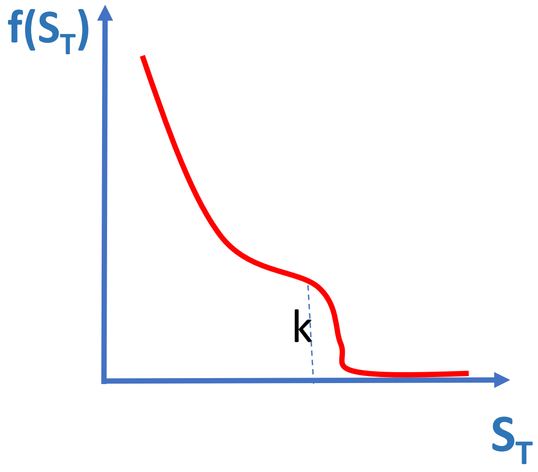
زمان انتخاب استراتژی خرید مصنوعی سهام

Short Stock (Short sell)



Synthetic Short Stock





$K=110$

$S_0=110$

$C=22$

$P=25$

$S_T=150$

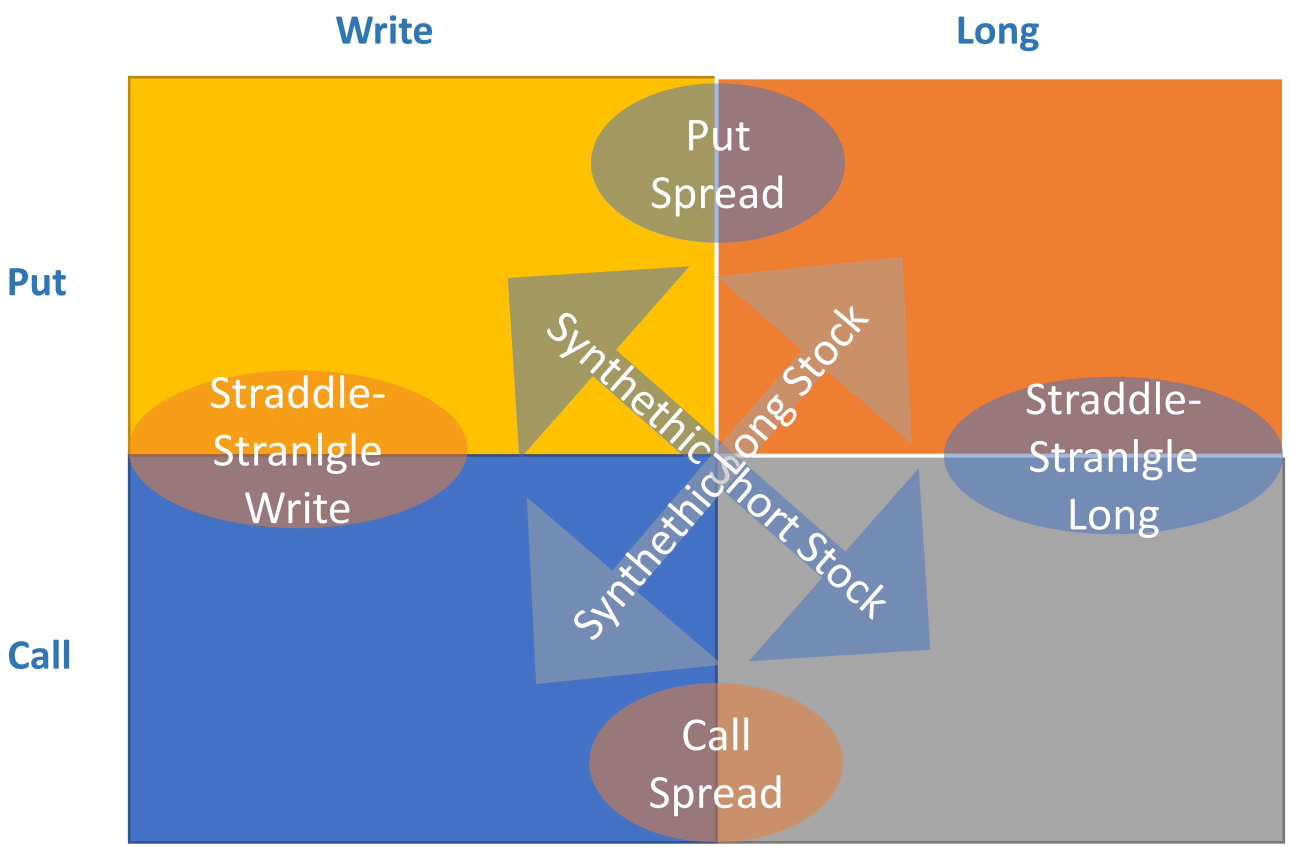
Spot Short Profit= $S_0-S_T=110-150=-40$

Spot short Return= $1-S_T/S_0=1-150/110=1-1.36=-36\%$

Synthetic Short Profit= $C-P-S_T+k=22-25-150+110=-43$

Synthetic Profit= $1-(K-S_T)/(C-P)=1-(-40)/(-3)=-1233\%$

الگوی کلی انتخاب استراتژی‌ها

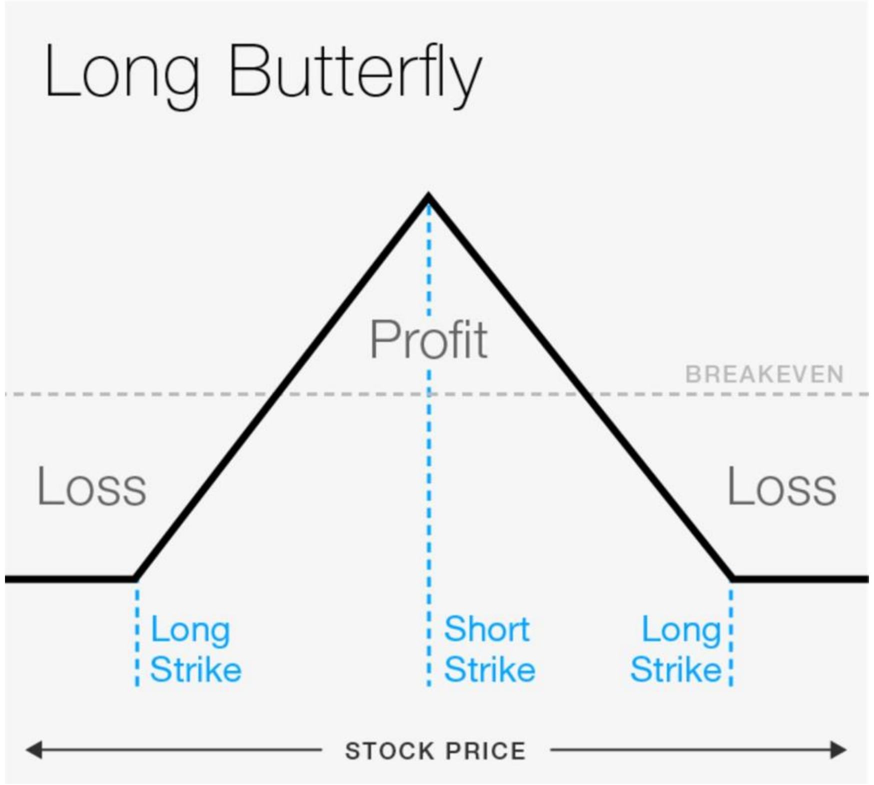


سایر استراتژی‌های ترکیبی

✓ خرید و فروش پروانه	Butterfly Long and Short
✓ خریدو فروش کرکس	Condor Short and Long
✓ خرید و فروش تازیانه	Strap Long and Short
✓ خرید و فروش نوار	Strip Long and Short
✓ شکاف نسبت اختیارخرید	Call Ratio Spread
✓ شکاف نسبت اختیار فروش	Put Ratio Spread
✓ عکس شکاف نسبت اختیار خرید	Call Ratio Backspread
✓ عکس شکاف نسبت اختیار فروش	Put Ratio Backspread
✓ شکاف جعبه‌ای	Box Spread

خرید پروانه
Long Butterfly

در اکسل طراحی کنید

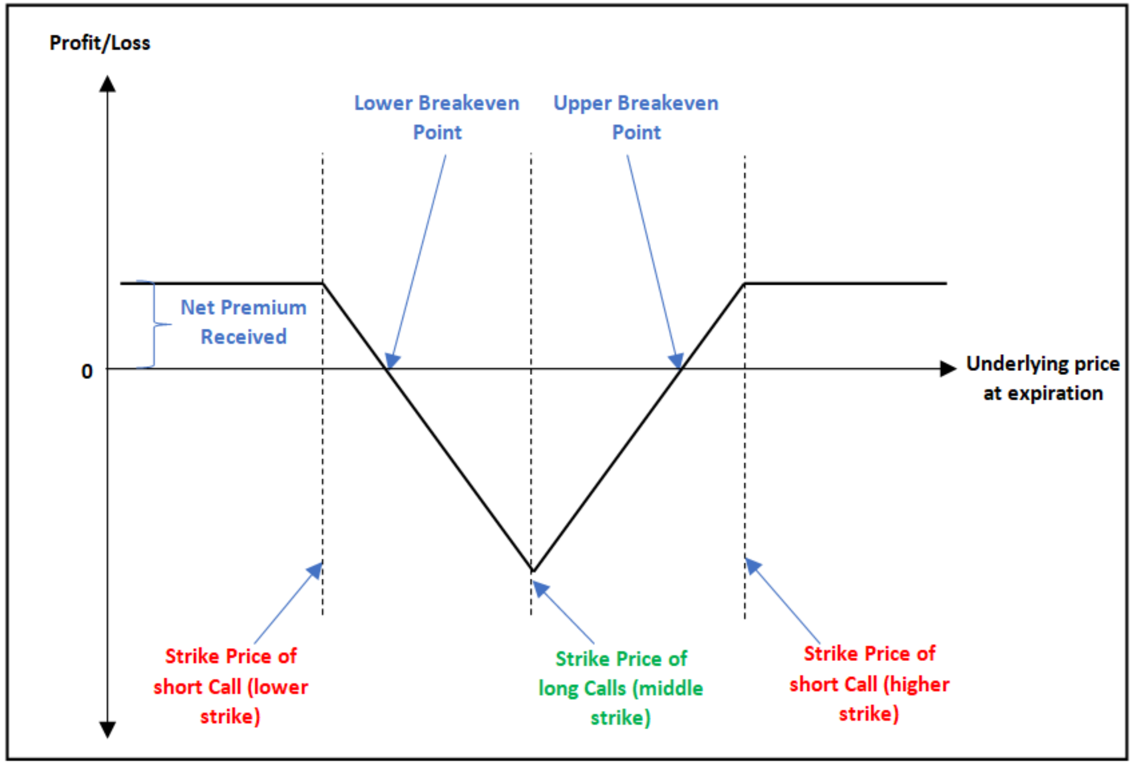


- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور دو اختیار خرید با قیمت توافقی K_M
- ✓ یا
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور دو اختیار فروش با قیمت توافقی K_M

فروش پروانه
Short Butterfly

در اکسل طراحی کنید

- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید دو اختیار خرید با قیمت توافقی K_M
- ✓ یا
  - ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
  - ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
  - ✓ خرید دو اختیار فروش با قیمت توافقی K_M

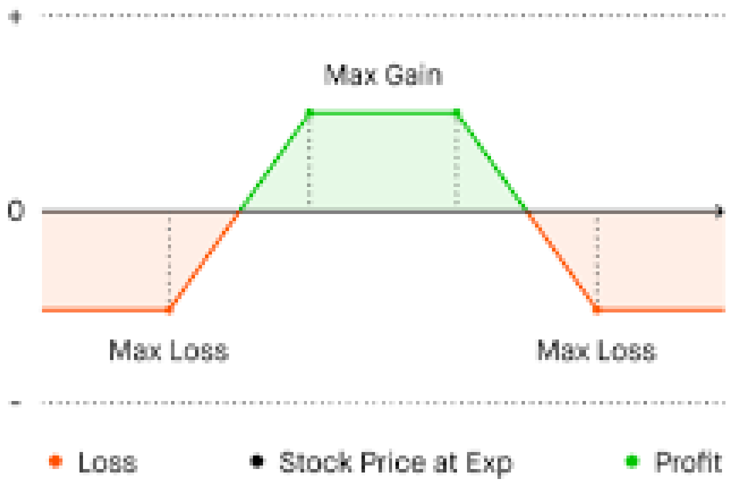


خرید کرکس

Long Condor

- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_{M1}
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_{M2}
- ✓ یا
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_{M1}
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_{M2}

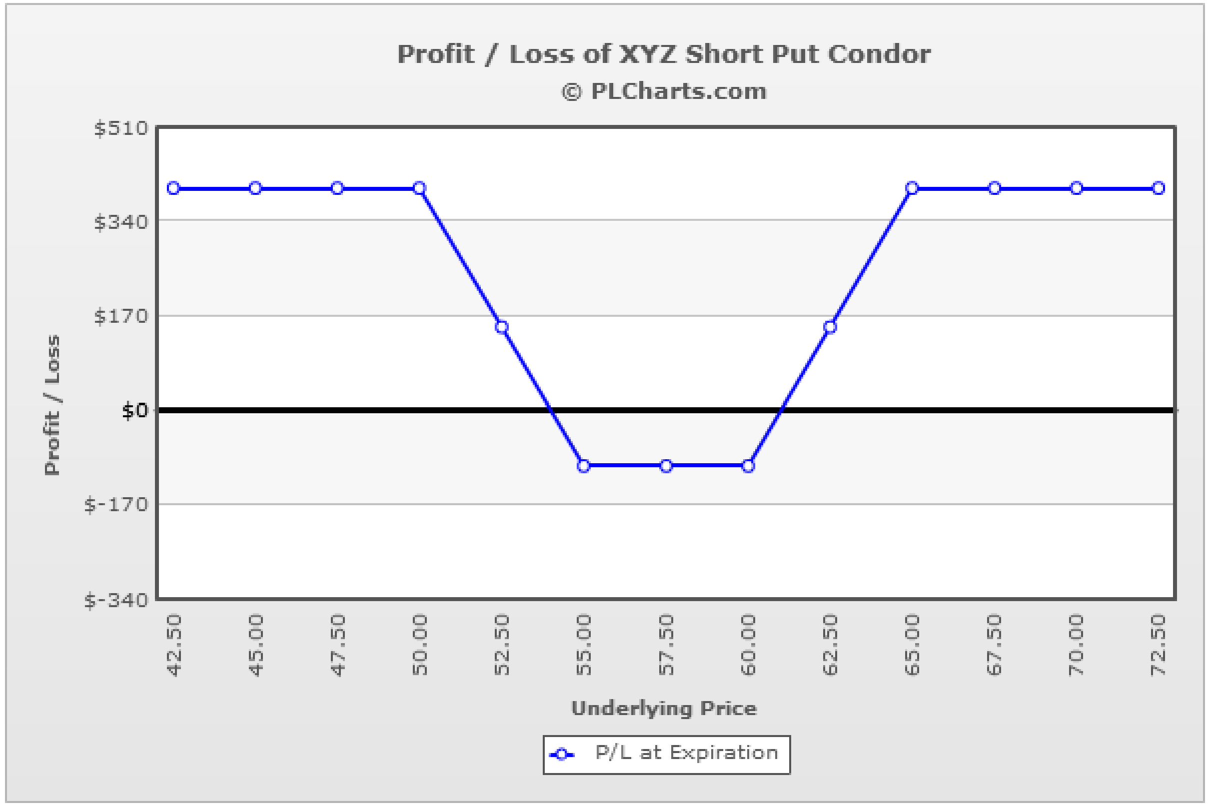
در اکسل طراحی کنید



فروش کرکس

Short Condor

در اکسل طراحی کنید



- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_{M1}
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_{M2}
- ✓ یا
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_{M1}
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_{M2}

خرید تازیانه
Long Strap

در اکسل طراحی کنید

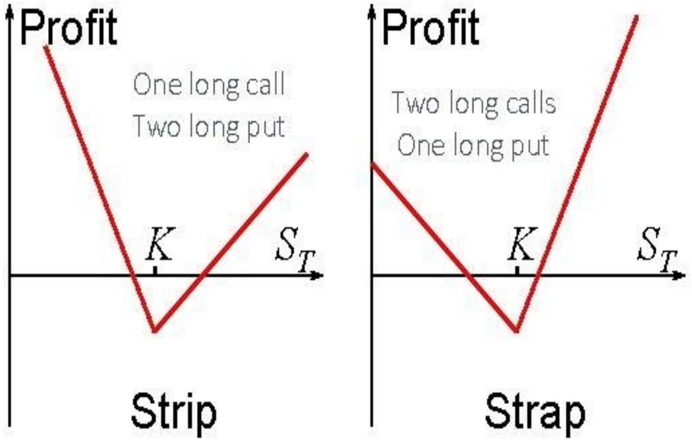
✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K

✓ خرید دو اختیار خرید با قیمت توافقی K

Strip & Strap

Figure 11.11, page 267

All are European Options.

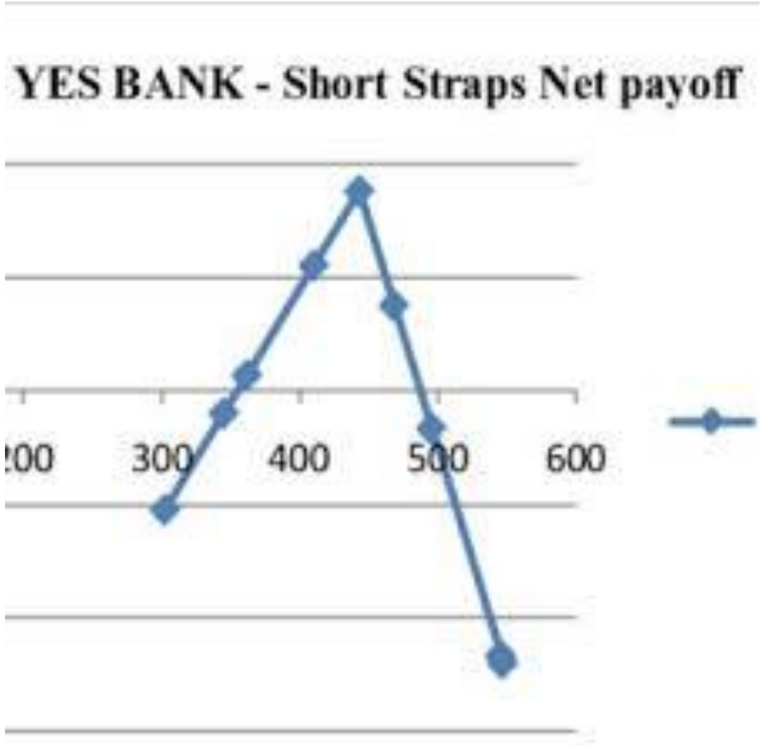


فروش تازیانه
Short Strap

در اکسل طراحی کنید

✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K

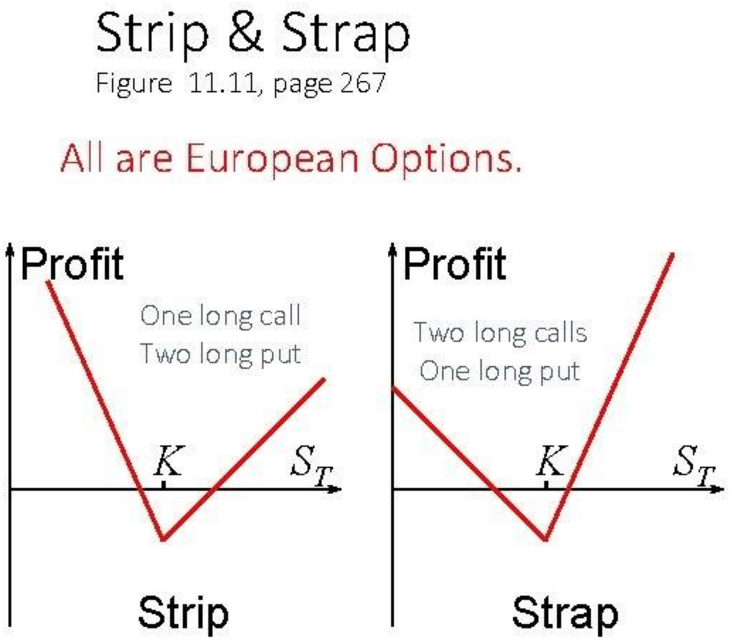
✓ صدور دو اختیار خرید با قیمت توافقی K



خرید نوار
Long Strip

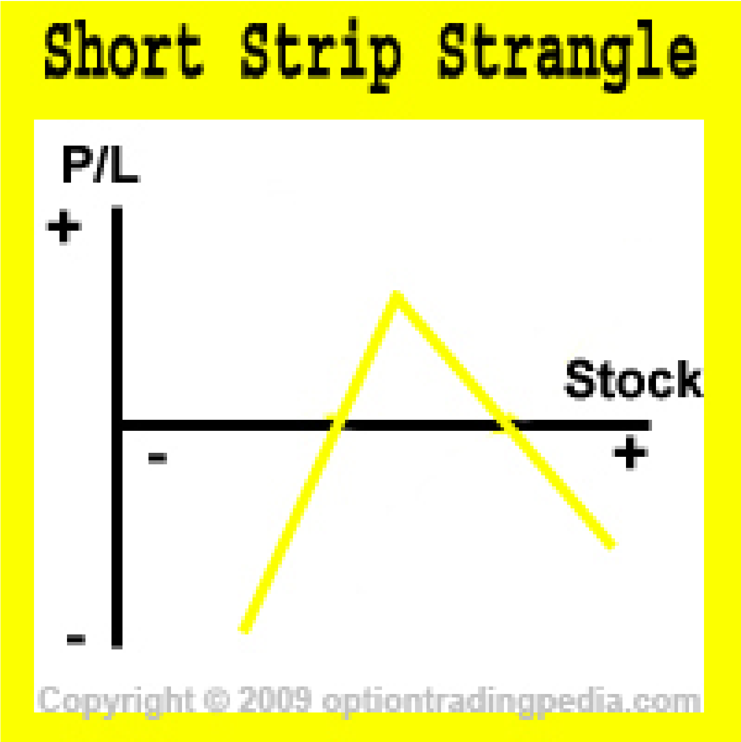
در اکسل طراحی کنید

- ✓ خرید دو اختیار فروش با قیمت توافقی K
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K



فروش نوار
Short Strip

در اکسل طراحی کنید

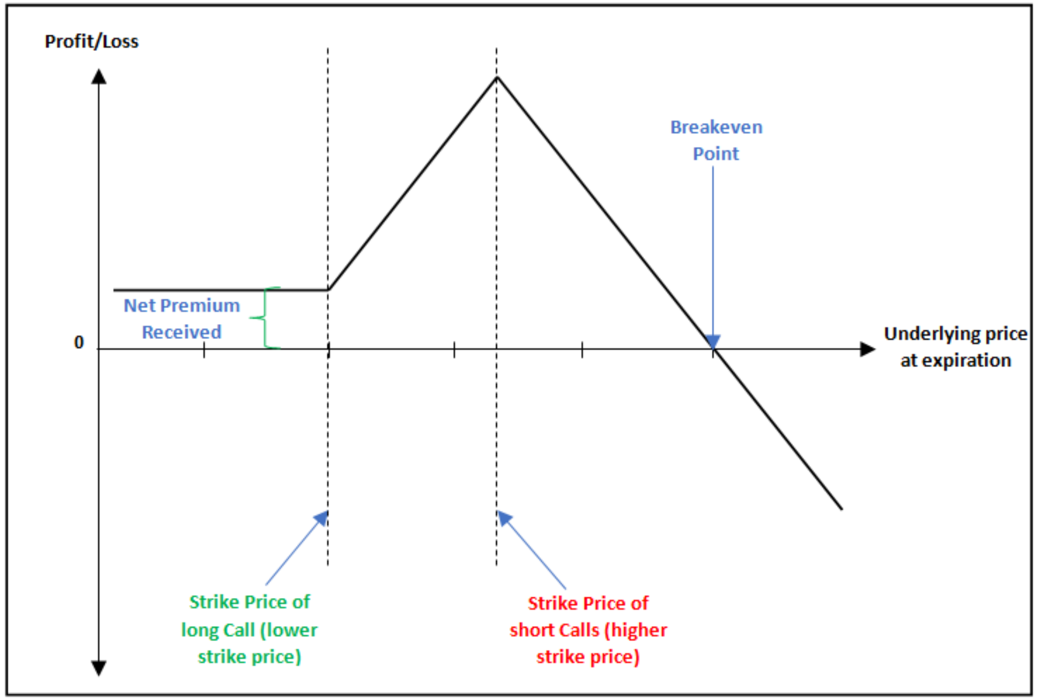


- ✓ صدور دو اختیار فروش با قیمت توافقی K
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K

شکاف نسبت اختیار خرید

Call Ratio Spread

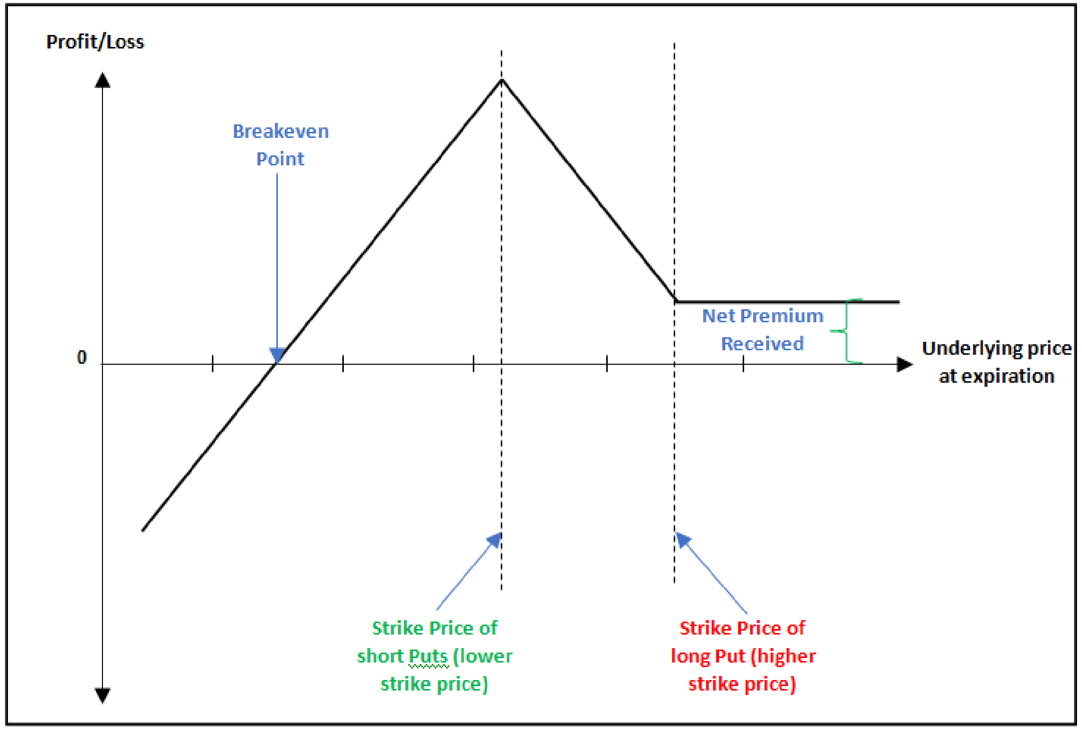
در اکسل طراحی کنید



- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ +
- ✓ صدور دو اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ یا +
- ✓ صدور سه اختیار خرید با قیمت توافقی K_H

شکاف نسبت اختیار فروش
Put Ratio Spread

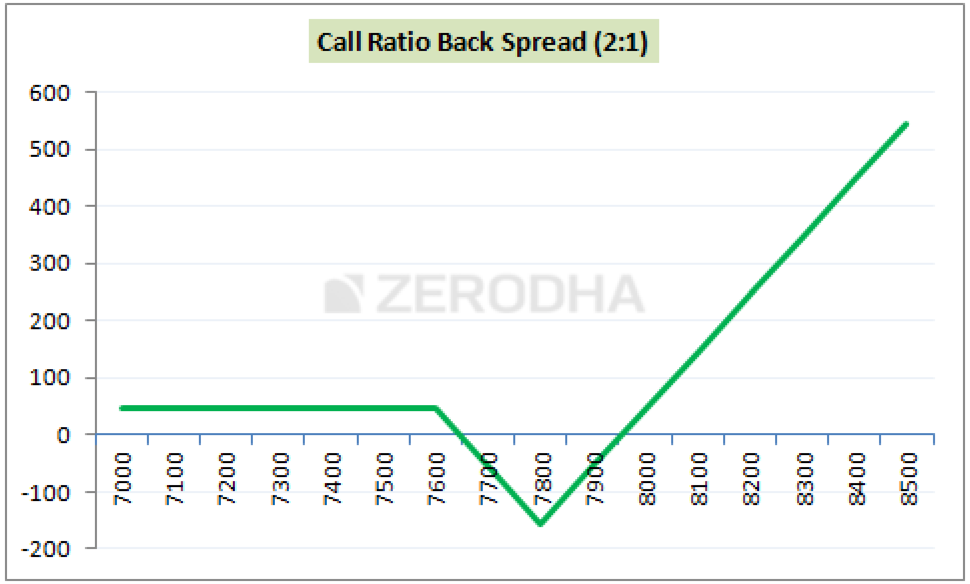
در اکسل طراحی کنید



- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
- ✓ +
- ✓ صدور دو اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ یا +
- ✓ صدور سه اختیار خرید با قیمت توافقی K_L

عکس شکاف نسبت اختیار خرید
Call Ratio Backspread

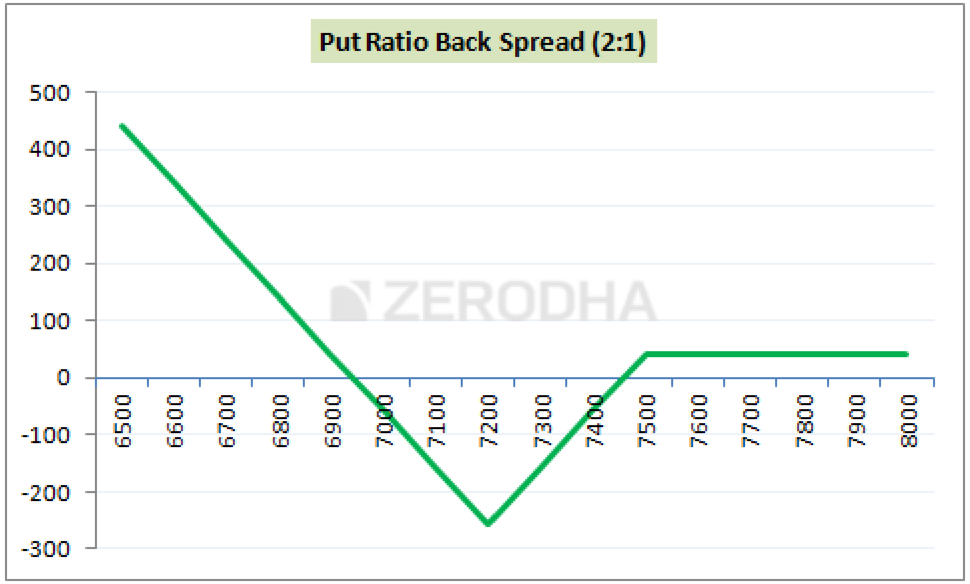
در اکسل طراحی کنید



- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ +
- ✓ خرید دو اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ یا +
- ✓ خرید سه اختیار خرید با قیمت توافقی K_H

عکس شکاف نسبت اختیار فروش
Put Ratio Backspread

در اکسل طراحی کنید

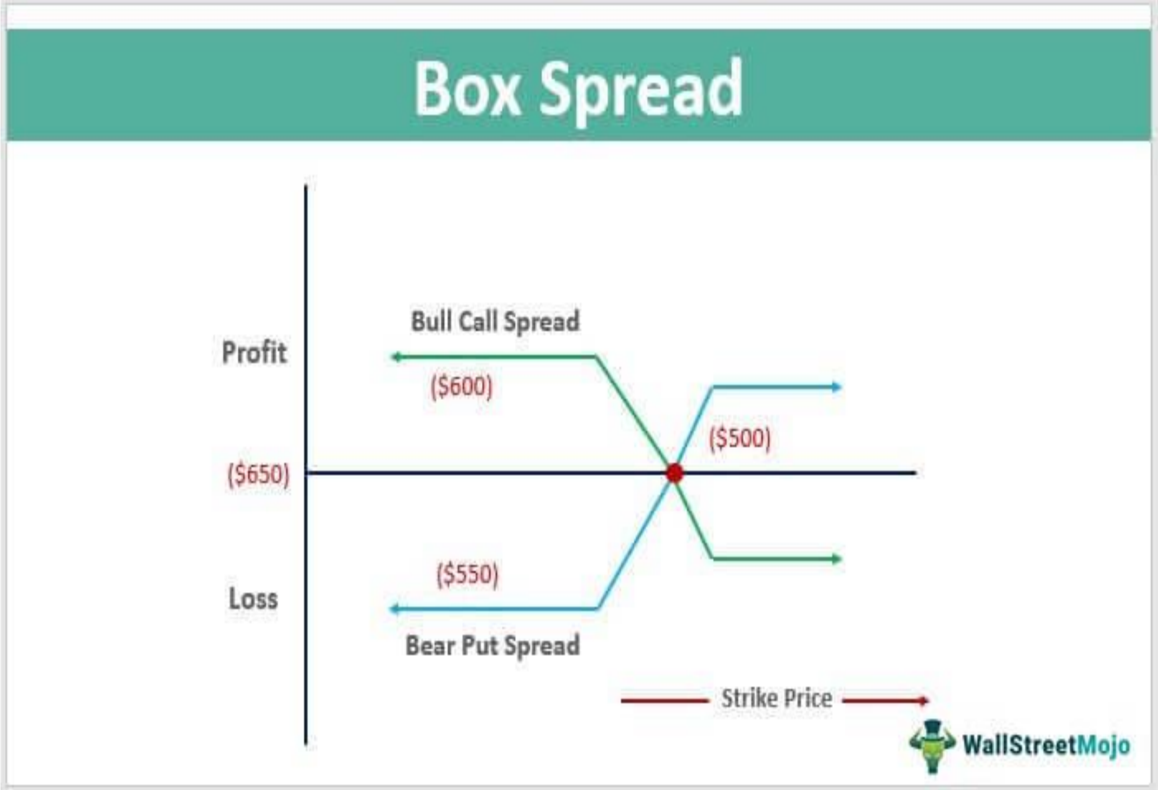


- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
- ✓ +
- ✓ خرید دو اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ یا +
- ✓ خرید سه اختیار خرید با قیمت توافقی K_L

شکاف جعبه‌ای
Box Spread

- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H
- ✓ یا
- ✓ خرید یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_L
- ✓ صدور یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_L
- ✓ خرید یک اختیار خرید با قیمت توافقی K_H
- ✓ صدور یک اختیار فروش با قیمت توافقی K_H

در اکسل طراحی کنید



پروژه

- ✓ استراتژی‌های تشریح نشده بین دانشجویان تقسیم شود و موظف باشند موارد زیر را انجام دهند
- ✓ تهیه معادله مادر
- ✓ تهیه تابع جبری
- ✓ تهیه تابع نموداری
- ✓ حل مثال در اکسل
- ✓ معرفی شرایط انتخاب استراتژی

دلتا: پوشش ریسک با قرارداد اختیار و فرصت آربیتراژ

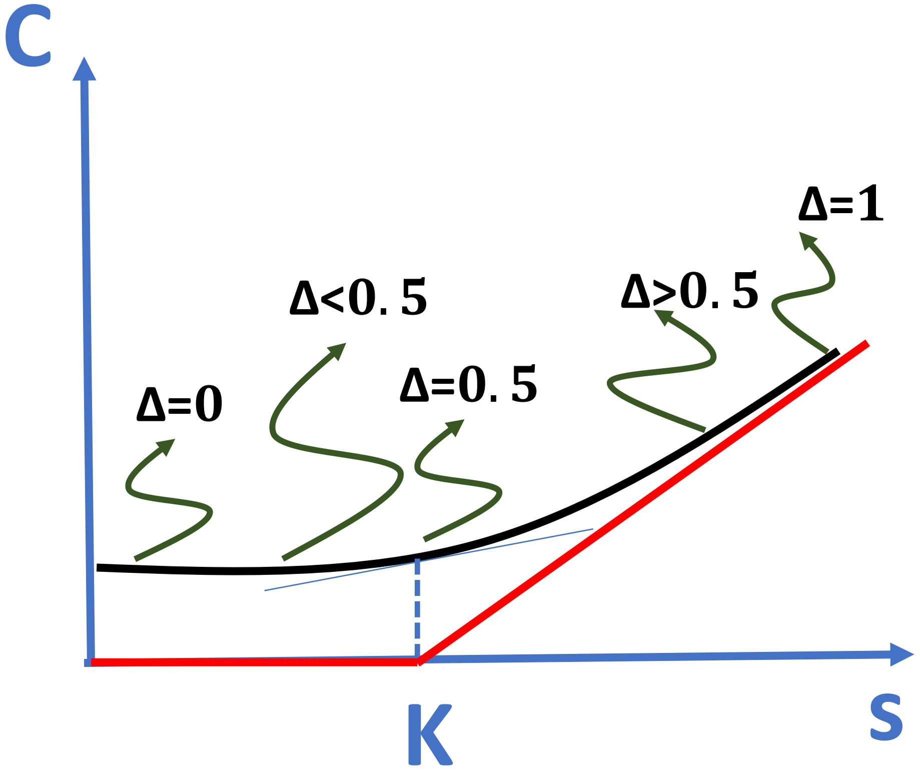
تعبیر دلتا در قراردادهای اختیار

- ✓ ابزار توسعه استراتژی‌های اختیار معامله
- ✓ میزان معامله از دارایی نقد به ازای یک واحد دارایی معامله از قرارداد اختیار
- ✓ مشتق قیمت اختیار نسبت به قیمت نقد در بلک شولز
- ✓ تغییر در قیمت اختیار به ازای تغییر کوچکی در قیمت نقد
- ✓ شیب خط قیمت‌گذاری اختیار
- ✓ دلتا تابعی از قیمت نقد و زمان تا سررسید است ($\Delta=F(S,t)$)

$$\text{Call } \Delta=\frac{\partial C}{\partial S}=N(d_1) \qquad \text{Put } \Delta=\frac{\partial P}{\partial S}N(d_1)-1$$

دلتا و خط قیمت‌گذاری اختیار خرید (Δ=F(S))

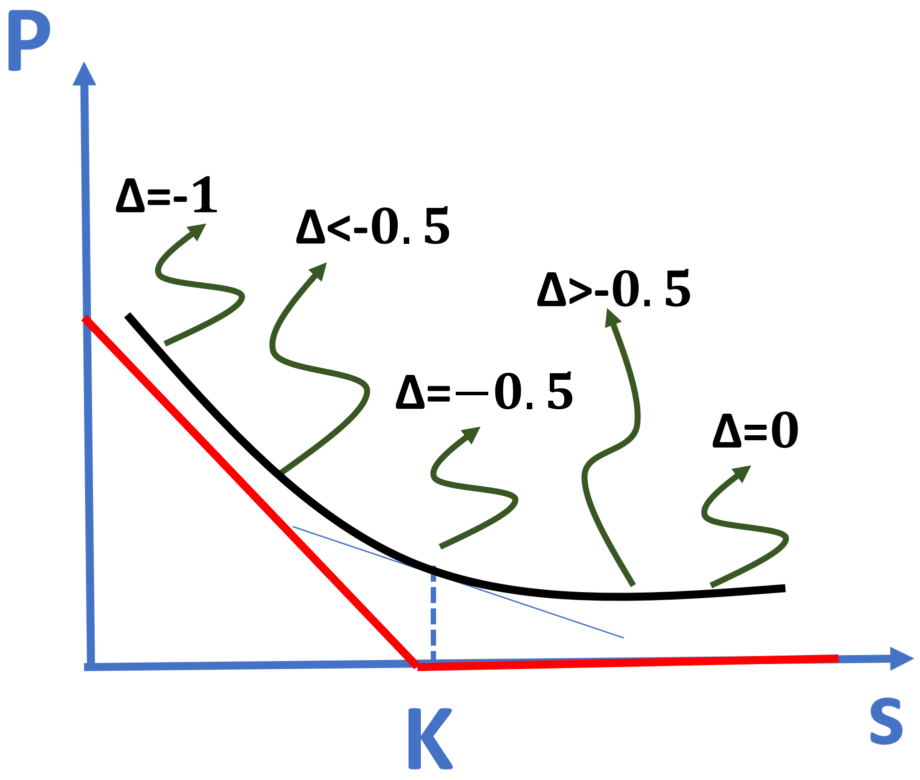
- ✓ در اختیار خرید عمیقا بی ارزش (Deep OTM) (قیمت نقد به سمت صفر میل می‌کند) دلتا به سمت صفر میل می‌کند.



- ✓ با افزایش قیمت نقد از نقطه صفر دلتا افزایش می‌یابد.
- ✓ در اختیار خرید به قیمت (ITM) (قیمت نقد برابر قیمت توافقی) دلتا ۰/۵ است.
- ✓ در بالای قیمت توافقی دلتا بیش از ۰/۵ و در زیر آن کمتر از ۰/۵ است.
- ✓ در اختیار خرید عمیقا با ارزش (Deep ATM) (قیمت نقد به سمت بی نهایت میل می‌کند) دلتا به سمت یک میل می‌کند.

دلتا و خط قیمت‌گذاری اختیار فروش ((Δ=F(S))

- ✓ در اختیار فروش عمیقا با ارزش (Deep ITM) (قیمت نقد به سمت صفر میل می‌کند) دلتا به سمت ۱– میل می‌کند.

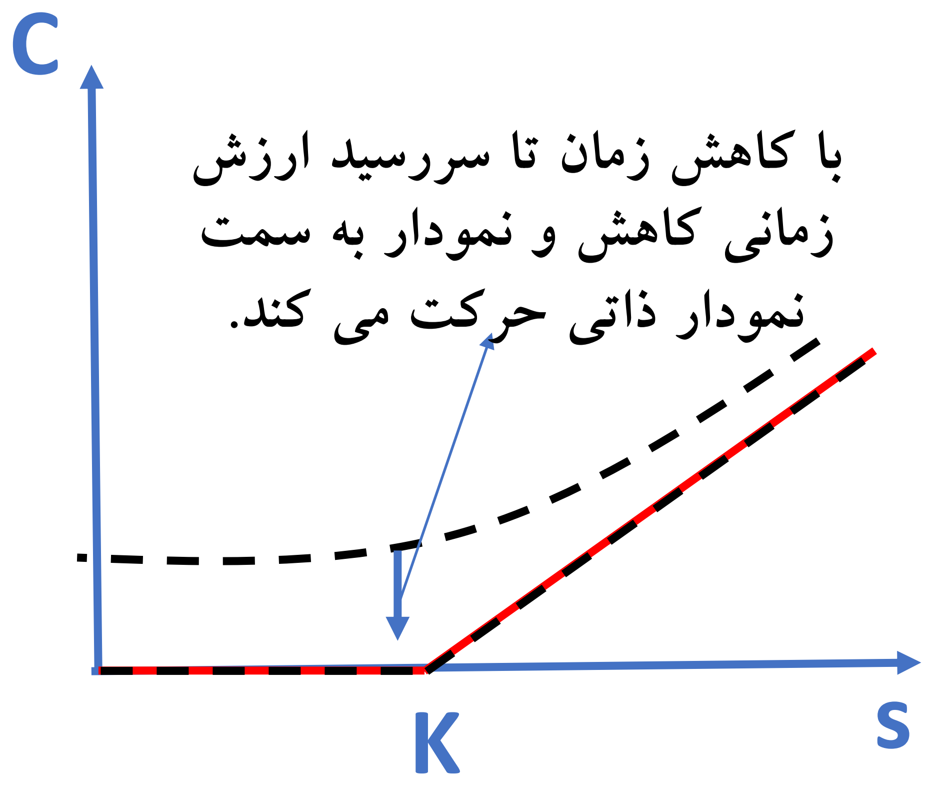


- ✓ با افزایش قیمت نقد از نقطه صفر دلتا افزایش می‌یابد.
- ✓ در اختیار فروش به قیمت (ITM) (قیمت نقد برابر قیمت توافقی) دلتا ۰/۵– است.
- ✓ در بالای قیمت توافقی دلتا بیش از ۰/۵– و در زیر آن کمتر از ۰/۵– است.
- ✓ در اختیار فروش عمیقا بی ارزش (Deep OTM) (قیمت نقد به سمت بی نهایت میل می‌کند) دلتا به سمت صفر میل می‌کند.

دلتای اختیار خرید و زمان تا سررسید ((Δ=F(t)

- ✓ در اختیار خرید ITM با حرکت به سمت سررسید دلتا در همه مقادیر S به سمت یک میل می کند.

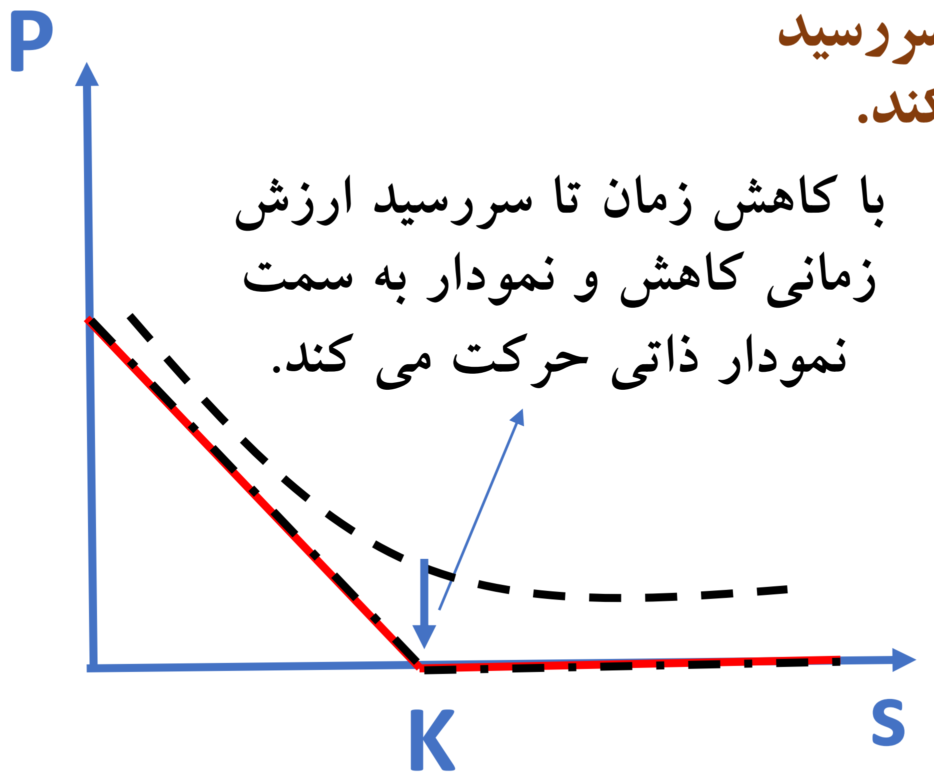
- ✓ در اختیار خرید OTM با حرکت به سمت سررسید دلتا در همه مقادیر S به سمت صفر میل می کند.



دلتای اختیار فروش و زمان تا سررسید (Δ=F(t))

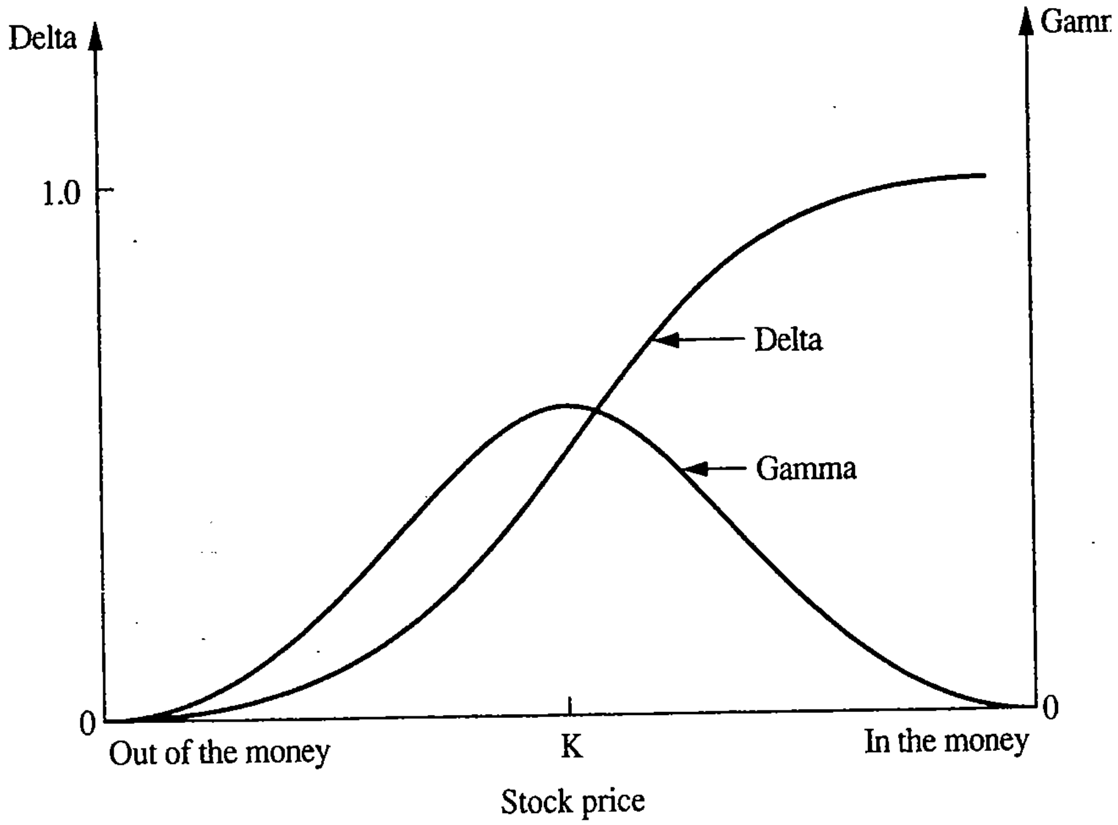
- ✓ در اختیار فروش ITM با حرکت به سمت سررسید دلتا در همه مقادیر S به سمت یک میل می کند.

- ✓ در اختیار فروش OTM با حرکت به سمت سررسید دلتا در همه مقادیر S به سمت صفر میل می کند.



گاما و تابعیت دلتا از قیمت نقد Δ=F(S)

- ✓ اگر S روی محور افقی و Δ روی محور عمودی درج شود گاما می‌شود تغییرات در دلتا به ازای تغییرات جزئی قیمت نقد
- ✓ گاما شیب تابع دلتا است
- ✓ در مقادیر عمیق OTM گاما صفر است.
- ✓ در مقدار ATM گاما و نوستان دلتا حداکثر است.
- ✓ این حداکثر با حرکت به سمت سررسید بیشتر می‌شود.
- ✓ در مقادیر عمیق ITM گاما صفر است.
- ✓ با نقد ثابت و حرکت به سمت سررسید گاما زیاد می‌شود.
- ✓ به ازای نقد ثابت، در سررسید گاما حداکثر است.



$$\text{Put } \Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial s}=\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \qquad \text{Call } \Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial s}=\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}$$

معاملات اختیار، معاملات نقد و قرض‌دهی و قرض‌گیری

- ✓ خرید اختیار خرید با دلتای ۰/۵ ⟸ قرض گرفتن پول و خرید نقد به میزان نیم اختیار
- ✓ خرید اختیارفروش با دلتای ۰/۲ ⟸ فروش نقد به میزان ۰/۲ اختیار و سپرده گذاری آن
- ✓ دلتا عامل ریسک سرمایه‌گذاری نسبت به تغییرات S است.
- ✓ یعنی اگر دلتا برابر ۰/۷ باشد، با یک واحد پولی تغییر در قیمت نقد، قیمت اختیار ۰/۷ واحد تغییر می کند.
- ✓ درمجموع دلتا تابع قیمت نقد، نوسان قیمت نقد، فاصله تاسررسید ونرخ بهره بدون‌ریسک است.

پوشش ریسک به کمک اختیار

- خرید اختیار خرید با C ⟸ قرض‌گیری B با نرخ بدون ریسک و خرید نقد S در حالی که $B \leq 0$

- $C=\Delta S+B \quad => \quad C-\Delta S=B \quad => \quad -C+\Delta S=-B$

- در پوشش ریسک نقد با اختیار، Δ واحد از خرید نقد و فروش یک واحد از اختیار شبیه قرض‌گیری بدون ریسک است.

- با اختیار Misspriced فرصت آربیتراژ ایجاد می‌شود.

- فرصت سرمایه‌گذاری بدون ریسک با نرخ بهره بالاتر از نرخ بدون ریسک

  - وقتی اختیار خرید underpriced باشد با خرید اختیار خرید و فروش استقراضی Δ واحد از نقد،
  - وقتی اختیار خرید overpriced باشد با صدور اختیار خرید و خرید دلتا واحد از نقد
  - و وجوه لازم با نرخ بدون ریسک تامین شود، فرصت آربیتراژ است.

محدودیتهای آربیتراژ در قیمت‌گذاری

اختیار معامله

مفهوم محدودیتهای قیمت

- ✓ مرزهای قیمت Price Boundaries
- ✓ محدودیتهای فارغ از مدل Model Free Boundaries
- ✓ محدودیتهای آربیتراژ Arbitrage Constraints
- ✓ حداقل و حداکثر قیمت اختیار

پیش‌فرض‌های محدودیت‌های آربیتراژ ۱

- هزینه مبادله وجود ندارد.
- شکاف قیمت خرید و فروش وجود ندارد.
- مالیات وجود ندارد.
- وجه ضمان لازم نیست.
- محدودیتی برای فروش استقراضی وجود ندارد.

- سرمایه گذاران هم در بازار نقد و هم در بازار اختیارها می توانند سرمایه گذاری کنند.
- سود تقسیمی بلافاصله در زمان تصویب پرداخت می شود و قیمت معادل آن کاهش می یابد.
- سرمایه گذاران از فرصت های آربیتراژ بلادرنگ استفاده می‌کنند.
- سرمایه گذاران ثروت بیشتر را به کمتر ترجیح می دهند.

پیش‌فرض‌های محدودیت‌های آربیتراژ ۲

- ارزش زمانی پول مد نظر است.
- نرخ بهره مثبت است.
- نرخ بهره وام و سپرده‌گذاری برابر است. در غیر این صورت آربیتراژ
- در صورتی که بهره برداشت شود نرخ بهره سالانه دو برابر نرخ بهره ششماهه است
- در صورت عدم برداشت نشود نرخ بهره سالانه برابر است با:
  - $R = (1 + r)^2 - 1$
  - R: نرخ بهره سالانه
  - r: نرخ بهره ششماهه

پیش‌فرض‌های محدودیت‌های آربیتراژ ۳

سود نقدی در زمان تخصیص (روز مجمع) پرداخت می شود.

زودترین و دیرترین زمان پرداخت مشخص است.

حداقل و حداکثر سود تقسیمی مشخص است.

	اول تیر	اول خرداد	
	$\underline{D}$		۸۰
		$\overline{D}$	۱۲۰

بدترین حالت

بهترین حالت

رویکرد اثباتی محدودیت‌های آربیتراژ

برهان خلف

اثبات غیر ممکن بودن خلاف محدودیت آربیتراژ

برقراری محدودیت در صورت غیر ممکن بودن خلاف آن

حالات مختلف در مورد اختیار خرید

- ✓ حداکثر قیمت اختیار خرید (اروپایی یا امریکایی، با یا بدون سود تقسیمی)
- ✓ حداقل قیمت اختیار خرید بدون سود تقسیمی (اروپایی یا امریکایی)
- ✓ حداقل قیمت اختیار خرید با سود تقسیمی اروپایی
- ✓ حداقل قیمت اختیار خرید با سود تقسیمی امریکایی

حداکثر قیمت اختیار خرید

مثال در اکسل

$$Proposition\ 1: C \le S$$

خلاف قضیه: C>S پس: C-S>0

اجزای سبد	t_0	اعمال اختیار قبل از سررسید	زمان سررسید T	
			$S_T > K$	$S_T \le K$
صدور اختیار خرید	+C	تحویل سهام و دریافت مبلغ توافقی	$-(S_T-K)$	0
خرید نقدی سهام	-S		$+S_T$	$+S_T$
خالص جریان نقدی	C-S>0	+K>0	+K>0	$+S_T>0$

حداکثر قیمت اختیار خرید: نتیجه آربیتراژ

در همه حالات جریان نقدی مثبت است. پس:

سرمایه‌گذاری صفر است

چون منفی نیست، ریسك صفر است

چون مثبت است، سود وجود دارد

استقبال بازار برای

فروش اختیار خرید

خرید سهام پس:

کاهش قیمت اختیار خرید و

افزایش قیمت سهام پس:

برقراری معادله

امریکایی یا اروپایی

با سود تقسیمی یابدون سود تقسیمی

حداقل قیمت اختیار خرید بدون سود تقسیمی ۱

$$\boldsymbol{proposition2: C \geq max[0, S - Ke^{-rt}]}$$

$$\begin{cases} S < Ke^{-rt} \Rightarrow C \geq 0 \Rightarrow No\ Proof\ Needed \\ S > Ke^{-rt} \Rightarrow C \geq S - Ke^{-rt} \end{cases}$$

خلاف قضیه: $C < S - Ke^{-rt}$ **پس:** $\boldsymbol{-C + S - Ke^{-rt} > 0}$

حداقل قیمت اختیار خرید بدون سود تقسیمی ۲

مثال در اکسل

$$-C + S - Ke^{-rt} > 0$$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T > K$	$S_T \leq K$
خرید اختیار خرید	-C	(S_T-K)	0
فروش استقراضی	+S	$-S_T$	$-S_T$
اعطای وام با نرخ r	$-Ke^{-rt}$	+K	+K
	>0	0	$K-S_T>=0$

حداکثر قیمت اختیار خرید: نتیجه آربیتراژ

در همه حالات جریان نقدی غیر منفی است. پس:

سرمایه‌گذاری صفر است

چون منفی نیست، ریسک صفر است

چون منفی نیست، سود وجود دارد

استقبال بازار برای

خرید اختیار خرید

فروش سهام پس:

افزایش قیمت اختیار خرید و

کاهش قیمت سهام پس:

برقراری معادله

امریکایی یا اروپایی

چند قاعده کلی ۱

- ✓ اختیار خرید به قیمت (In the money) اگر بدون سود تقسیمی باشد همیشه ارزش زمانی (مابه التفاوت ارزش ذاتی و بازار) دارد به جز زمان سررسید. چون ثابت شد که C از $S-Ke^{-rt}$ کوچکتر نمی‌شود.

- ✓ اگر S بیش از Ke^{-rt} باشد اختیار خرید اعمال نمی شود چون قیمت فروش $S-Ke^{-rt}$ و درامد اعمال S-K (یعنی کمتر از قیمت فروش) است. به عبارتی باید بیش از S-K بخرند تا بفروشم.

- ✓ پس: اختیار خرید امریکایی بدون سود تقسیمی هرگز قبل از سررسید اعمال نمی شود.
  - ✓ سود اعمال: S-K ، دریافتی فروش: حداقل $S-Ke^{-rt}$ بزرگتر از S-K

- ✓ پس: اختیار خرید امریکایی بدون سود تقسیمی به قیمت اروپایی به فروش می‌رسد.

حداقل قیمت اختیار خرید اروپایی با سود تقسیمی

$$proposition3: C \geq max\left[0, S - \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rT}\right]$$

$$\begin{cases} S < \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rT} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ No\ Proof\ Needed \\ S > \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rt} \Rightarrow C \geq S - \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rT} \end{cases}$$

خلاف قضیه: $C < S - \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rT}$ پس: $-C + S - \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rt} > 0$

حداقل قیمت اختیار خرید اروپایی با سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$-C + S - \bar{D}e^{-rt} - Ke^{-rt} > 0$$

اجزای سبد	t_0	t	زمان سررسید T	
			$S_T > K$	$S_T \leq K$
خرید اختیار خرید	-C		S_T-K	0
فروش استقراضی	+S	-D	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی	$-\bar{D}e^{-rt}$	$+\bar{D}$		0
قرض دهی	$-Ke^{-rt}$		+K	+K
	>0	$\bar{D}-D>0$	0	$K-S_T>0$

حداقل قیمت اختیار خرید امریکایی با سود تقسیمی

$$proposition4: C \geq max \begin{cases} 0(1)\ No\ Proof\ Needed \\ S - Ke^{-rt_1}(2) \\ S - \overline{D_1}e^{-rt_1} - Ke^{-rt_2}(3) \\ S - \overline{D_1}e^{-rt_1} - \overline{D_2}e^{-rt_2} - Ke^{-rT}(4) \end{cases}$$

فرض: دو زمان برای پرداخت سود داریم t_1 و t_2

اعمال در: t_1 ارزش فعلی K (۲)

اعمال در: t_2 ارزش فعلی K و $\overline{D_1}$ (۳)

عدم اعمال:ارزش فعلی K و $\overline{D_1}$ و $\overline{D_2}$ (٤)

$$C \geq Max(S - Ke^{-rt_1})(2)$$

خلاف قضیه: $C < S - Ke^{-rt_1}$ پس: $-C + S - Ke^{-rt_1} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	هر زمان قبل از t_1
خرید اختیار خرید	-C	S-K
فروش استقراضی	+S	-S
قرض دهی	$-Ke^{-rt_1}$	+K
	>0	0

$$C \geq S - \overline{D_1}e^{-rt_1} - Ke^{-rt_2} \quad (3)$$

خلاف قضیه: $C < S - \overline{D_1}e^{-rt_1} - Ke^{-rt_2}$ پس: $-C + S - \overline{D_1}e^{-rt_1} - Ke^{-rt_2} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2
خرید اختیار خرید	-C	0	S-K
فروش استقراضی	+S	-D	-S
قرض دهی	$-\overline{D_1}e^{-rt_1}$	$\overline{D_1}$	
قرض دهی	$-Ke^{-rt_2}$		+K
	>0	>0	0

$$C \geq S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - \overline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$$

خلاف قضیه: $C < S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - \overline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$

پس: $-C + S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - \overline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	T_1	t_2	T	
				$S_T > K$	$S_T \le K$
خرید اختیار خرید	-C	0	0	S_T-K	0
فروش استقراضی	+S	$-D_1$	$-D_2$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی	$-\overline{D}_1 e^{-rt_1}$	$+\overline{D}_1$			
قرض دهی	$-\overline{D}_2 e^{-rt_2}$		$\overline{D}_2$		
قرض دهی	$-Ke^{-rT}$			+K	+K
	>0	>0	>0		K-S_T

چند قاعده کلی ۲

- قرارداد اختیار خریدامریکایی به قیمت، ارزش زمانی دارد مگر قبل از تقسیم سود و در زمان سررسید.
  - در تقسیم سود چون با افت قیمت دارایی و اختیار مواجه خواهد شد کسی بیش از قیمت آن را نمی‌خرد. ضمنا به جای فروش اعمال می‌شود چون سود اعمال بیش از ارزش فروش است.
  - در زمان سررسید هم چون قرار است اعمال شود ارزش زمانی ندارد.
- قرارداد اختیار خرید اروپایی در زمان تقسیم سود هم ارزش زمانی دارد.
  - چون قابل اعمال نیست و به امید سود بیشتر در آینده با ارزش زمانی خریداری می‌شود.
- اختیار خرید امریکایی به قیمت، قبل از سررسید اعمال نمی‌شود مگر قبل از سود تقسیمی.
  - این قرارداد اگر لازم باشد فروخته می شود تا به اندازه ارزش زمانی دریافتی بیشتری حاصل شود.

برخی دیگر از نامعادلات اختیار خرید

- ✓ محدودیت روی ارزش اختیار خریدهای با زمان‌های اعمال مختلف $C(T2) \geq C(T1)$ (۵) و $T2>T1$
- ✓ محدودیت حداقل روی تفاوت ارزش اختیار خریدهای با قیمت توافقی متفاوت $C(K1) \geq C(K2)$ (۶) و $K2>K1$
- ✓ محدودیت حداکثر روی تفاوت ارزش اختیار خریدهای با قیمت توافقی متفاوت $C(K1) - C(K2) \leq (K2 - K1)\, e^{-rT}$ (۷a)
  - ✓ امریکایی بدون سود تقسیمی و اروپایی
- ✓ محدودیت حداکثر روی تفاوت ارزش اختیار خریدهای با قیمت توافقی متفاوت $C(K1) - C(K2) \leq (K2 - K1)$ (۷b)
  - ✓ امریکایی با سود تقسیمی

حالات مختلف در مورد اختیار فروش

- ✓ حداکثر قیمت اختیار فروش امریکایی (با سود تقسیمی و بدون سود تقسیمی تفاوت ندارد)
- ✓ حداکثر قیمت اختیار فروش اروپایی (با سود تقسیمی و بدون سود تقسیمی تفاوت ندارد)
- ✓ حداقل قیمت اختیار فروش امریکایی بدون سود تقسیمی
- ✓ حداقل قیمت اختیار فروش امریکایی با سود تقسیمی
- ✓ حداقل قیمت اختیار فروش اروپایی بدون سود تقسیمی
- ✓ حداقل قیمت اختیار فروش اروپایی با سود تقسیمی

حداکثر قیمت اختیار فروش امریکایی

مثال در اکسل

$$Proposition\ 8: P \leq K$$

خلاف قضیه: P>K پس: P-K>0

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
صدور اختیار فروش	+P	$-(K-S_T)$	0
وام دهی	-K	K+I	K+I
خالص جریان نقدی	P-K>0	$S_T+I>0$	K+I>0

حداکثر قیمت اختیار فروش امریکایی: نتیجه آربیتراژ

در همه حالات جریان نقدی مثبت است. پس:

سرمایه‌گذاری صفر است

چون منفی نیست، ریسک صفر است

چون مثبت است، سود وجود دارد

با سود تقسیمی یابدون سود تقسیمی

استقبال بازار برای

فروش اختیار فروش پس:

کاهش قیمت اختیار فروش پس:

برقراری معادله

حداکثر قیمت اختیار فروش اروپایی

مثال در اکسل

$$Proposition\ 9: P \leq Ke^{-rT}$$

خلاف قضیه: $P > Ke^{-rT}$ پس: $P-Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
صدور اختیار فروش	+P	$-(K-S_T)$	0
وام دهی	$-Ke^{-rT}$	K	K
خالص جریان نقدی	$P-Ke^{-rT}>0$	$S_T>0$	$K>0$

حداکثر قیمت اختیار فروش امریکایی: نتیجه آربیتراژ

در همه حالات جریان نقدی مثبت است. پس:

سرمایه‌گذاری صفر است

چون منفی نیست، ریسک صفر است

چون مثبت است، سود وجود دارد

استقبال بازار برای

فروش اختیار فروش پس:

کاهش قیمت اختیار فروش پس:

برقراری معادله

با سود تقسیمی یابدون سود تقسیمی

حداقل قیمت اختیار فروش امریکایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$\boldsymbol{Proposition\ 10}: P \geq \max(0, (K - S))$$

خلاف قضیه: P< K-S پس: -P+K-S>0

اجزای سبد	t_0
خرید اختیار فروش	–P
خرید دارایی از بازار	-S
اعمال اختیار فروش	+K
خالص جریان نقدی	>0

حداقل قیمت اختیار فروش اروپایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$Proposition\ 11: P \geq Ke^{-rT} - S$$

خلاف قضیه: P<K e^{-rT}-S پس: -P+K e^{-rT} -S>0

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
خرید اختیار فروش	–P	0	$K - S_T$
خرید نقد	-S	S_T	S_T
قرض گیری	K e^{-rT}	-K	-K
خالص جریان نقدی	>0	$S_T - K \geq 0$	0

چند قاعده کلی ۳

- اختیار فروش اروپایی روی دارایی بدون سود تقسیمی نمی تواند بیش از ارزش ذاتی به فروش برسد.
  - از روی نامعادله فهمیده می‌شود.
  - از آنجایی که در سررسید باید به ارزش ذاتی فروخته شود، انتظار می‌رود در طول زمان رشد ارزش داشته باشد.

- اختیار فروش امریکایی هرگز زیر ارزش ذاتی فروخته نمی‌شود. به عبارتی همیشه ارزش زمانی صفر یا مثبت دارد.
  - در معادله قیمت بالاتر از k-s است در حالی که ارزش ذاتی ke^{-rT}-s است.
  - بنابراین در جریان زمان تا سررسید رشد ارزش نخواهد داشت.

حداقل قیمت اختیار فروش امریکایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$Proposition\ 12: P \geq max(0, (Ke^{-rT} + \underline{D}e^{-rt} - S))$$

خلاف قضیه: $P < K\, e^{-rT} + \underline{D}e^{-rt} - S$ پس: $-P + K\, e^{-rT} + \underline{D}e^{-rt} - S > 0$

اجزای سبد	t_0	t	زمان سررسید T: $S_T > K$	$S_T \leq K$
خرید اختیار فروش	$-P$		0	$K-S_T$
خرید نقدی	$-S$	$+D$	$+S_T$	$-S_T$
قرض گیری	$\underline{D}e^{-rt}$	$-\underline{D}$	0	0
قرض گیری	$+Ke^{-rT}$		-K	-K
	>0	$D-\underline{D}>0$	0	0

حداقل قیمت اختیار فروش امریکایی با سود تقسیمی

$$proposition13: P \geq max \begin{cases} 0(1)\ No\ Proof\ Needed \\ K - S(2) \\ Ke^{-rt_1} - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1}\ (3) \\ Ke^{-rt_2} - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1} + \underline{D}_1 e^{-rt_2}\ (4) \end{cases}$$

$\mathrm{P} \geq Max(K - S)(2)$

خلاف قضیه: $\mathbf{p} < S - Ke^{-rt_1}$ پس: $-\mathbf{p} + S - Ke^{-rt_1} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0
خرید اختیار فروش	-P
خرید نقد دارایی	-S
اعمال اختیار فروش	+K
	>0

$$P \geq Ke^{-rt_1} - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1} \quad (3)$$

خلاف قضیه: $\mathbf{P} < Ke^{-rt_1} - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1}$ پس $-\mathbf{P} - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1} + Ke^{-rt_1} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	T_0	t_1	t_1+e
خرید اختیار فروش	-p		K-S
خرید نقد	-S	+D	+S
قرض گیری	$+\underline{D}_1 e^{-rt_1}$	$-\underline{D}_1$	
قرض گیری	$+Ke^{-rt_2}$		-K
	>0	**>0**	**0**

$$P \geq Ke^{-rt_2} - S + \underline{D_1}e^{-rt_1} + \underline{D_2}e^{-rt_2}$$

خلاف قضیه: $P < Ke^{-r2} - S + \underline{D_1}e^{-rt_1} + \underline{D_2}e^{-rt_2}$ پس: $Ke^{-r2} - P - S + \underline{D_1}e^{-rt_1} + \underline{D_2}e^{-rt_2} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	t_2+e
خرید اختیار فروش	-P			K − s
خرید نقد	-S	$+D_1$	$+D_2$	+S
قرض گیری	$-\underline{D_1}e^{-rt_1}$	$+\overline{D_1}$		
قرض گیری	$-\underline{D_2}e^{-rt_2}$		$\overline{D_2}$	
قرض گیری	$-Ke^{-r2}$			+K
	>0	>0	>0	0

برخی دیگر از نامعادلات اختیار فروش

- محدودیت روی ارزش اختیار فروش‌های امریکایی با زمان‌های انقضای متفاوت $\mathrm{P}(T2) \geq P(T1)$ (۱٤) و $T2>T1$
- محدودیت حداقل روی تفاوت ارزش اختیار فروش‌های با قیمت توافقی متفاوت $P(K2) \geq P(K1)$ (۱٥) و $K2>K1$
- محدودیت حداکثر روی تفاوت ارزش اختیارفروش‌های با قیمت توافقی متفاوت $P(K2) - P(K1) \leq (K2 - K1)\, e^{-rT}$ (۱٦a)
  - اروپایی
- محدودیت حداکثر روی تفاوت ارزش اختیار خریدهای با قیمت توافقی متفاوت $P(K2) - P(K1) \leq (K2 - K1)$ (۱٦b)
  - امریکایی

محدودیتهای آربیتراژ برای معادله اختیار خرید-فروش

مفهوم معادله اختیار خرید-فروش (PCP)

- ✓ یک اختیار خرید و یک اختیار فروش روی
  - ✓ یک دارایی مشابه
  - ✓ با قیمت توافقی مشابه
  - ✓ با زمان سررسید مشابه
- ✓ استول (۱۹۶۹)

$$C - P = S - Ke^{-rT}$$

- ✓ تفاوت قیمت نقدو ارزش فعلی قیمت توافقی برابر تفاوت P و C خواهد بود.
- ✓ کاربردها
  - ✓ محاسبه قیمت اختیار فروش از اختیار خرید
  - ✓ محاسبه ارزش ضمنی سهام بر اساس اختیار خرید و فروش
  - ✓ ارزیابی کارآیی بازار اختیارات
  - ✓ شناسایی فرصت‌های آربیتراژ

PCP برای اختیار اروپایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$\text{proposition1}: C - P = S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P < S - Ke^{-rT}$ پس: $-C + P + S - Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
خرید Call	-C	$S_T - K$	0
فروش Put	+P	0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	+S	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-Ke^{-rT}$	+K	+K
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی بدون سود تقسیمی: نتیجه آربیتراژ

تشکیل سبد با جریان نقدی مثبت و هرگز جریان نقدی منفی محقق نمی شود. پس:

سرمایه‌گذاری صفر است.

چون جریان نقدی منفی وجود ندارد، ریسك صفر است.

چون جریان نقدی زمان صفر مثبت است، سود وجود دارد.

استقبال بازار برای

خرید اختیار خرید پس: افزایش قیمت آن

فروش اختیار فروش پس: کاهش قیمت آن

برقراری معادله

PCP برای اختیار اروپایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$\text{proposition1}: C - P = S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P > S - Ke^{-rT}$ پس: $C - P - S + Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
فروش Call	C	$-(S_T - K)$	0
خرید Put	$-P$	0	$(K - S_T)$
خرید Spot	$-S$	S_T	S_T
وام گیری	Ke^{-rT}	$-K$	$-K$
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$\text{proposition1}: C - P = S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۲: $C - P < S - Ke^{-rT}$ پس: $-C + P + S - Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
خرید Call	-C	$S_T - K$	0
فروش Put	+P	0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	+S	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-Ke^{-rT}$	+K	+K
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی با سود تقسیمی مشخص

$$\mathbf{proposition2:}\ C - P = S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P < S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$ پس: $-C + P + S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - Ke^{-rT} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	زمان سررسید T	
				$S_T \geq K$	$S_T < K$
خرید Call	-C			$S_T - K$	0
فروش Put	+P			0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	+S	$-D_1$	$-D_2$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-Ke^{-rT}$			+K	+K
قرض دهی با نرخ r	$-D_1e^{-rt_1}$	D_1		0	0
قرض دهی با نرخ r	$-D_2e^{-rt_2}$		D_2	0	
خالص	>0	0	0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی با سود تقسیمی مشخص

$$\mathbf{proposition2: C - P = S - D_1 e^{-rt_1} - D_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}}$$

خلاف ۲: $C - P > S - D_1 e^{-rt_1} - D_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$ پس: $C - P - S + D_1 e^{-rt_1} + D_2 e^{-rt_2} + Ke^{-rT} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	زمان سررسید T	
				$S_T \geq K$	$S_T < K$
فروش Call	C			$-(S_T - K)$	0
خرید Put	-P			0	$(K - S_T)$
خرید Spot	-S	$+D_1$	$+D_2$	$+S_T$	$+S_T$
قرض گیری با نرخ r	$+Ke^{-rT}$			-K	-K
قرض گیری با نرخ r	$+D_1 e^{-rt_1}$	$-D_1$		0	0
قرض گیری با نرخ r	$+D_2 e^{-rt_2}$		$-D_2$	0	
خالص	>0	0	0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی با سود تقسیمی نا مشخص

$$proposition3: S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - \overline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT} \leq C - P \leq S - \underline{D}_1 e^{-rt_1} - \underline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P > S - \underline{D}_1 e^{-rt_1} - \underline{D}_2 e^{-rt_2} - Ke^{-rT}$

پس: $C - P - S + \underline{D}_1 e^{-rt_1} + \underline{D}_2 e^{-rt_2} + Ke^{-rT} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	زمان سررسید T	
				$S_T \geq K$	$S_T < K$
فروش Call	C			$-(S_T - K)$	0
خرید Put	-P			0	$(K - S_T)$
خرید Spot	-S	$+D_1$	$+D_2$	$+S_T$	$+S_T$
قرض گیری با نرخ r	$+Ke^{-rT}$			-K	-K
قرض گیری با نرخ r	$+\underline{D}_1 e^{-rt_1}$	$-\underline{D}_1$		0	0
قرض گیری با نرخ r	$\underline{D}_2 e^{-rt_2}$		$-\underline{D}_2$	0	
خالص	>0	>0	>0	0	0

PCP برای اختیار اروپایی با سود تقسیمی نا مشخص

$proposition3: S-\overline{D}_1\, e^{-rt_1}-\overline{D}_2 e^{-rt_2}-Ke^{-rT}\le C-P\le S-\underline{D}_1 e^{-rt_1}-\underline{D}_2\, e^{-rt_2}-Ke^{-rT}$

خلاف ۲ $S-\overline{D}_1\, e^{-rt_1}-\overline{D}_2 e^{-rt_2}-Ke^{-rT}>C-P$

پس: $-C+P+S-\overline{D}_1\, e^{-rt_1}-\overline{D}_2 e^{-rt_2}-Ke^{-rT}>0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	زمان سررسید T	
				$S_T \ge K$	$S_T < K$
خرید Call	-C			(S_T-K)	0
فروش Put	+P			0	- $(K-S_T)$
فروش Spot	+S	$-D_1$	$-D_2$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-Ke^{-rT}$			+K	+K
قرض دهی با نرخ r	$-\underline{D}_1 e^{-rt_1}$	$+\overline{D}_1$		0	0
قرض دهی با نرخ r	$-\underline{D}_2 e^{-rt_2}$		$+\overline{D}_2$	0	
خالص	>0	>0	>0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی بدون سود تقسیمی

$$\text{proposition4}: S - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

مثال در اکسل

خلاف ۱: $C - P > S - Ke^{-rT}$ پس: $C - P - S + Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \ge K$	$S_T < K$
فروش Call	$+C$	$-(S_T - K)$	0
خرید Put	$-P$	0	$(K - S_T)$
خرید Spot	$-S$	$+S_T$	$+S_T$
قرض گیری با نرخ r	$+Ke^{-rT}$	$-K$	$-K$
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی بدون سود تقسیمی

مثال در اکسل

$$\text{proposition4}: S - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۲: $S - K > C - P$ پس: $S - K - C + P > 0$

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \ge K$	$S_T < K$
خرید Call	$-C$	$(S_T - K)$	0
فروش Put	$+P$	0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	$+S$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-Ke^{-rT}$	$+K$	$+K$
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی با سود تقسیمی مشخص

$$\text{proposition5}: S - D_1 e^{-rt_1} - D_2 e^{-rt_2} - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P > S - Ke^{-rT}$ پس: $C - P - S + Ke^{-rT} > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	زمان سررسید T	
		$S_T \ge K$	$S_T < K$
فروش Call	$+C$	$-(S_T - K)$	0
خرید Put	$-P$	0	$+(K - S_T)$
خرید Spot	$-S$	$+S_T$	$+S_T$
قرض گیری با نرخ r	$+Ke^{-rT}$	$-K$	$-K$
خالص	>0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی با سود تقسیمی مشخص

$$\text{proposition5}: S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۲: $S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - K > C - P$

پس: $S - D_1e^{-rt_1} - D_2e^{-rt_2} - K - C + P > 0$

مثال در اکسل

اجزای سبد	t_0	t_1	t_2	زمان سررسید T	
				$S_T \ge K$	$S_T < K$
خرید Call	-C			$(S_T - K)$	0
فروش Put	+P			0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	+S	$-D_1$	$-D_2$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-K$			+K	+K
قرض دهی با نرخ r	$-D_1e^{-rt_1}$	$+D_1$		0	0
قرض دهی با نرخ r	$-D_2e^{-rt_2}$		$+D_2$	0	
خالص	>0	0	0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی با سود تقسیمی نا مشخص

مثال در اکسل

$$\text{proposition6}: S - \bar{D}_1 e^{-rt_1} - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۱: $C - P > S - Ke^{-rT}$ پس: $C - P - S + Ke^{-rT} > 0$

اجزای سبد	t_0	اگر در t_1 اختیار خرید اعمال شود	اگردر t_1 اختیار خریداعمال نشود	زمان سررسید T	
				$S_T \ge K$	$S_T < K$
فروش Call	+C	K-S	0	$-(S_T - K)$	0
خرید Put	-P	ارزش زمانی (اگر)	0	0	$(K - S_T)$
خرید Spot	-S	$+S$	$+D_1$	$+S_T$	$+S_T$
قرض گیری با نرخ r	$+Ke^{-rT}$	$-Ke^{-rT}+I$		-K	-K
خالص	>0	>0	>0	0	0

PCP برای اختیار امریکایی با سود تقسیمی نا مشخص

مثال در اکسل

$$\mathbf{proposition6}: S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - K \le C - P \le S - Ke^{-rT}$$

خلاف ۲: $S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - K > C - P$ پس: $S - \overline{D}_1 e^{-rt_1} - K - C + P > 0$

اجزای سبد	t_0	اگر put قبل از t_1 اعمال شود	اگر تا زمان t_1 put اعمال نشود	زمان سررسید T	
				$S_T \ge K$	$S_T < K$
خرید Call	$-C$	ارزش زمانی	0	$+(S_T - K)$	0
فروش Put	$+P$	-(K-S)	0	0	$-(K - S_T)$
فروش Spot	$+S$	$-S$	$-D_1$	$-S_T$	$-S_T$
قرض دهی با نرخ r	$-K$	+K+I		+K	+K
قرض دهی با نرخ r	$-\overline{D}_1 e^{-rt_1}$	$-\overline{D}_1 e^{-rt_1} + I$	$\overline{D}_1$		
خالص	>0	>0	>0	0	0

ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار

ارزش ذاتی

- ✓ هر دارایی جریان‌های نقدی ورودی در آینده دارد.
- ✓ جریان‌های نقدی دارایی از ریسک برخوردار است.
- ✓ ریسک جریان نقدی تعیین کننده نرخ تنزیل است.
- ✓ ارزش ذاتی: ارزش فعلی جریان‌های نقدی ورودی آتی با نرخ تنزیل متناسب با ریسک دارایی

ارزش ذاتی قرارداد اختیار

مثال در اکسل

- ✓ جریان نقدی اختیار خرید: $max(0,S_T-K)$
- ✓ ارزش ذاتی: $C = max(0,S_T-\mathrm{K})e^{-rT}$
- ✓ جریان نقدی اختیار فروش: $max(0,K - S_T)$
- ✓ ارزش ذاتی: $\mathrm{P} = max(0,K - S_T)e^{-rT}$

چالش‌های ارزش ذاتی قرارداد اختیار

✓ S_T مشخص نیست.

✓ حتی توزیع S_T نیز مشخص نیست.

✓ تخمین نرخ تنزیل کار پیچیده‌ای است.

✓ در مورد اختیار آمریکایی حتی زمان اعمال هم مشخص نیست.

راه حل مساله قیمت نقد زمان اعمال

- ✓ ۱) S_0 تخمین نقطه‌ای از S_T است و نرخ تنزیل صفر است یا در زمان اعمال هستیم.
- ✓ ۲) S_0 تخمین نقطه‌از S_T نیست اما به دلیلی S_T را میدانیم.
- ✓ ۳) S_T متغیری تصادفی است که مقادیر آن و احتمال هر مقدار مشخص است.
- ✓ ٤) S_T از یک فرآیند تصادفی پیروی می‌کند.
  - ✓ ٤-۱) با توزیع دوجمله‌ای گسسته
  - ✓ ٤-۲) با توزیع چندجمله‌ای گسسته
  - ✓ ٤-۳) با توزیع پیوسته براونی

S_0 تخمین نقطه‌ای از S_T است

❖ چون تورم نداریم پس نرخ بهره هم صفر فرض می‌شود.

✓ ارزش ذاتی اختیار خرید: $C = max(0, S_0 - K)$

✓ ارزش ذاتی اختیار فروش: $\mathrm{P} = max(0, K - S_0)$

S_0 تخمین نقطه‌ای از S_T است یا زمان اعمال است

- ارزش ذاتی اختیار معامله
  - ارزش ذاتی اختیار خرید
    - اگر $S_0 \leq K$: $C=0$
    - اگر $S_0 > K$: $C=S_0 - k$
    - $C= \max[0 , S_0 – K]$
  - ارزش ذاتی اختیار فروش
    - اگر $S_0 \geq K$: $P= 0$
    - اگر $S_0 < K$: $P= K-S_0$
    - $P = \max[0 , K – S_0]$

اثبات فرمول ارزش ذاتی اختیار خرید ۱

مثال در اکسل

ارزش ذاتی با فرض In the Money: $C = S_0 - K$

اگر: $C < S_0 - K$ پس $-C + S_0 - K > 0$

جریان نقدی زمان اعمال	جریان نقد زمان حال	معامله
$S_T - K$	$-C$	خرید اختیار خرید
$+K$	$-K$	پرداخت وام به مبلغ K
$-S_T$	$+S_0$	فروش استقراضی دارایی پایه
0	$-C+S_0-K>0$	مجموع

اثبات فرمول ارزش ذاتی اختیار خرید ۲

مثال در اکسل

ارزش ذاتی با فرض In the Money: $C = S_T - K$

اگر: $C > S_0 - K$ پس $C - S_0 + K > 0$

جریان نقدی زمان اعمال	جریان نقد زمان حال	معامله
$-(S_T - K) = -S_T + K$	$+C$	فروش اختیار خرید
$-K$	$+K$	دریافت وام به مبلغ K
$+S_T$	$-S_0$	خرید نقد دارایی پایه
0	$+C - S_0 + K > 0$	مجموع

S_0 تخمین نقطه‌از S_T نیست اما به دلیلی S_T را میدانیم

مثال در اکسل

❖ چون تورم داریم نرخ بهره صفر فرض نمی‌شود.

✓ ارزش ذاتی اختیار خرید: $C = max(0,S_T - K)e^{-rT}$

✓ ارزش ذاتی اختیار فروش: $\mathrm{P} = max(0,K - S_T)e^{-rT}$

ارزش ذاتی در زمان اعمال

- ✓ ارزش ذاتی اختیار خرید: $C = max(0,S_T - K)$

- ✓ ارزش ذاتی اختیار فروش: $\mathrm{P} = max(0,K - S_T)$

ارزش ذاتی در زمان اعمال

- ارزش ذاتی اختیار معامله
  - ارزش ذاتی اختیار خرید
    - اگر $S_T \leq K$: $C=0$
    - اگر $S_T > K$: $C=S_T - k$
    - $C= \max[\, 0 \,,\, S_T - K \,]$
  - ارزش ذاتی اختیار فروش
    - اگر $S_T \geq K$: $P= 0$
    - اگر $S_T < K$: $P= K-S_T$
    - $P = \max[\, 0 \,,\, K - S_T \,]$

اثبات فرمول ارزش ذاتی اختیار خرید در زمان اعمال ۱

مثال در اکسل

ارزش ذاتی با فرض In the Money: $C = S_T - K$

اگر: $C < S_T - K$ پس $-C + S_T - K > 0$

جریان نقد زمان حال	معامله
$-C$	خرید اختیار خرید
$-K$	اعمال اختیار خرید و اکتساب سهام
$+S_T$	فروش سهام
$-C + S_T - K > 0$	مجموع

اثبات فرمول ارزش ذاتی اختیار خرید ۲

مثال در اکسل

ارزش ذاتی با فرض In the Money: $C = S_T - K$

اگر: $C > S_T - K$ پس $C - S_T + K > 0$

جریان نقد زمان حال	معامله
$+C$	فروش اختیار خرید
$-S_T$	خرید سهام
$+K$	تحویل سهام با اعمال اختیار
$+C-S_T+K>0$	مجموع

تمرین

اثبات فرمول ارزش ذاتی اختیار فروش را بنویسید.

ارزش زمانی اختیار معامله ۱

- ✓ قیمت هر برگ اختیار معامله پایین تر از ارزش ذاتی آن نیست و دلیل آن وجود آربیتراژگرها در بازار است.

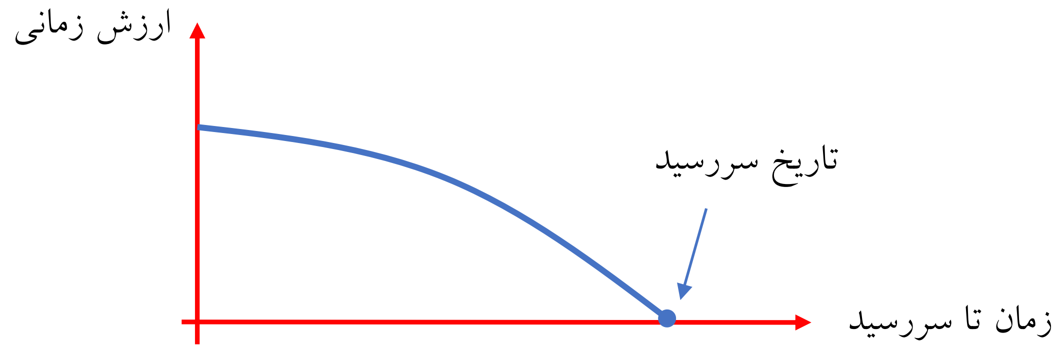
- ✓ احتمال نوسان قیمت در آینده یعنی احتمال اینکه $S_T - K$ بزرگتر شود. و برای اختیار فروش بالعکس

- ✓ بخش مازاد قیمت اختیار معامله بیانگر ارزش زمانی است.

- ✓ زمان دارای ارزش زمانی مثبت است به این معنی که هرچه زمان انقضای اوراق اختیار معامله طولانی تر باشد، شانس تغییرات قیمتی اوراق اختیار معامله بیشتر می شود و در نتیجه ارزش زمانی و به دنبال آن قیمت اختیار معامله افزایش می یابند.

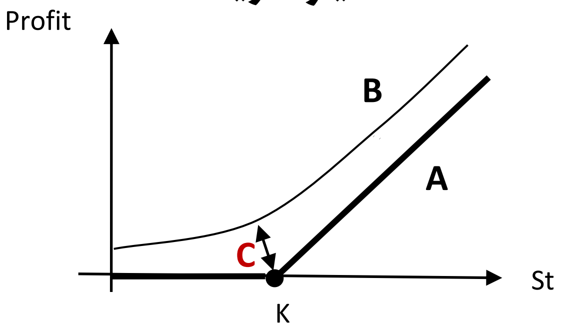
ارزش زمانی اختیار معامله ۲

- ارزش زمانی اختیار معامله: اختلاف بین قیمت بازار اختیار معامله و ارزش ذاتی اختیار معامله
- ارزش زمانی + ارزش ذاتی = ارزش کل (ارزش بازاری)
- هرچه به تاریخ سررسید نزدیک می شویم ارزش زمانی کاهش می یابد تا اینکه در تاریخ سررسید ارزش زمانی صفر شود. پس در تاریخ سررسید قیمت اختیار معامله با ارزش ذاتی آن برابر است.



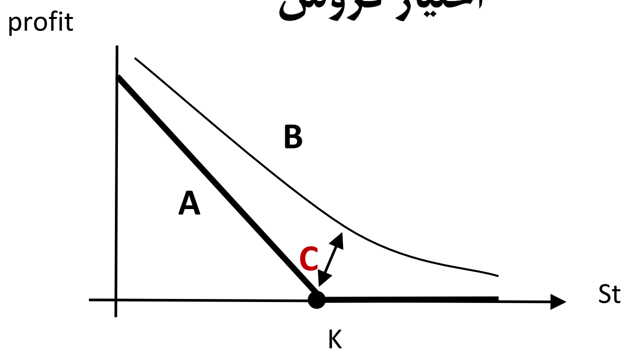
ارزش زمانی اختیار معامله ۳

اختیار خرید



- ✓ نمودار A : ارزش ذاتی اختیار معامله
- ✓ نمودار B : قیمت اختیار معامله
- ✓ فضای C : ارزش زمانی اختیار معامله
- ✓ همانطور که از روی نمودارها قابل مشاهده است قیمت اختیار معامله در نزدیکی قیمت توافقی بیشترین فاصله را از ارزش ذاتی دارد. به عبارت دیگر ارزش زمانی اختیار معامله در نزدیک قیمت توافقی حداکثر می باشد.

اختیار فروش



S_T متغیر تصادفی گسسته‌ای است با تابع احتمال مشخص

- ✓ تابعی از فضای نمونه به زیر مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی که آن را با حروف بزرگ مانند S نمایش میدهیم.
- ✓ دامنه این تابع (تابع متغیر تصادفی)، اعضای فضای نمونه و برد آن مقادیر اعداد حقیقی است که متغیر به خود می‌گیرد.

فضای نمونه	نرخ تنزیل فروردین ماه	R	r_1	r_2	r_3
مقادیر متغیر تصادفی	قیمت نقد سهام ابتدای فروردین	S	s_1	s_2	s_3

فضای نمونه	نرخ تنزیل فروردین ماه	R	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۰۵۵
مقادیر متغیر تصادفی	قیمت نقد سهام ابتدای فروردین	S	۲۶۰	۲۸۵	۲۹۵

S_T متغیر تصادفی گسسته‌ای است با تابع احتمال مشخص

تابعی که بتواند به هر مقدار متغیر تصادفی، احتمال آن را نسبت دهد، تابع احتمال گسسته عرفاً با باf(x) و در درس ما با f(s) نشان داده می‌شود.

دامنه تابع احتمال گسسته مقادیر متغیر تصادفی (S) و برد آن احتمال هریک از مقادیر متغیر تصادفی P (s) است.

s_3	s_2	s_1	S	قیمت ابتدای فروردین	مقادیر متغیر تصادفی
$P(s_3)$	$P(s_2)$	$P(s_1)$	P(S)	احتمال مقادیر مختلف قیمت	احتمال هریک از مقادیر

۲۹۵	۲۸۵	۲۶۰	S	قیمت فروردین ماه	مقادیر متغیر تصادفی
۰/۲ P(۲۹۵)	۰/۵ P (۲۸۵)	۰/۳ P(۲۶۰)	P(S)	احتمال مقادیر مختلف قیمت	احتمال هریک از مقادیر

S: قیمت نقد سهام (متغیر تصادفی)

P(S): احتمال قیمت سهام

خواص و مقدار انتظاری تابع احتمال گسسته

مجموع احتمال مقادیر مختلف قیمت برابر یک است.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

احتمال هریک از مقادیر قیمت بین صفر و یک است.

$$0 < p_i < 1$$

مقدار انتظاری تابع احتمال گسسته برابر امید ریاضی متغیر تصادفی است.

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} p_i s_i$$

در مثال اسلاید قبل:

E(S)=(۰/۳)(۲٦۰)+(۰/۵)(۲۸۵)+(۰/۲)(۲۹۵)=۲۷۲/۵

یعنی فرض بر این است که قیمت نقد برابر ۲۷۲/۵ است.

قیمت اختیار با فرض تابع احتمال گسسته

مثال در اکسل

اختیار خرید

$$C = (E(S_T) - K)e^{rT} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i s_{Ti} - K\right)e^{rT}$$

اختیار فروش

$$C = (K - E(S_T))e^{rT} = \left(K - \sum_{i=1}^{n} p_i s_{Ti}\right)e^{rT}$$

در مثال اسلاید قبل:

E(S)=(۰/۳)(۲٦۰)+(۰/۵)(۲۸۵)+(۰/۲)(۲۹۵)=۲۷۲/۵

یعنی فرض بر این است که قیمت نقد برابر ۲۷۲/۵ است.

مدل دوجمله‌ای قیمت‌گذاری اختیار

مدل دوجمله‌ای قیمت‌گذاری اختیار

فروض مدل دو جمله‌ای:

- ✓ بازار رقابتی ، کامل و کاراست.
- ✓ قیمت دارایی موضوع قرار داد اختیار یا با نرخ u یا با نرخ d رشد می‌کند و u و d از قبل مشخص و در طول زمان ثابت است.
- ✓ نرخ بهره یا نرخ بازده بدون ریسکr مشخص و در طول زمان ثابت است.
- ✓ سرمایه گذاران ثروت بیشتر را نسبت به کمتر ترجیح می دهند.

توزیع دوجمله‌ای؛ توزیعی گسسته در نظریه احتمالات

- ✓ متغیر تصادفی دارای دو مقدار محتمل است.
- ✓ احتمال هر مقدار مشخص است.
- ✓ مقدار انتظاری متغیر برابر میانگین توزیع است.

X	x1	x2
P(X)	P(x1)	P(x2)

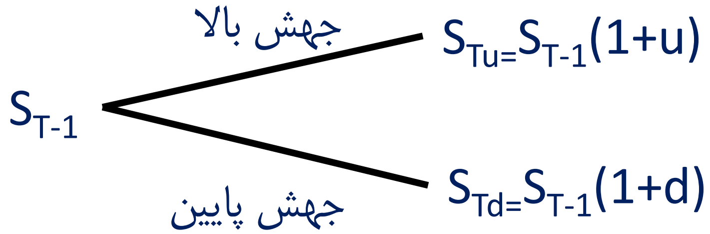
$$E(X)=X1P(X1)+X2P\ (X2)$$

مدل یک دوره ای دو جمله‌ای قیمت گذاری اختیار خرید

✓ در ساده‌ترین حالت مدل دو جمله‌ای فرض می‌شود یک دوره تا انقضای اختیار مانده

✓ S_{T-1}: قیمت دارایی در زمان حال (T-1) مشخص است.(قیمت نقد دارایی)

✓ S_T : قیمت دارایی در زمان انقضا (T) دو حالت دارد : S_{Td} و S_{tu}



u: نرخ رشد بالا برای قیمت دارایی

d: نرخ نرخ رشد پایین قیمت دارایی

رابطه d، u و r در مدل دوجمله‌ای

- ✓ پارامتر های u و d نوسانات قیمت دارایی پایه را نشان می دهند.
- ✓ r نرخ سود بدون ریسک در طول دوره T-1 تا T است.
- ✓ برای ایجاد تعادل و عدم وجود شرایط آربیتراژی باید: d<r<u
- ✓ اگر r<d<u باشد:
  - ✓ سرمایه‌گذار با اخذ وام و خرید دارایی سود بدون ریسک سرمایه‌گذاری کسب می‌کند(آربیتراژ).
  - ✓ در این صورت همه می‌خواهند این کار را بکنند و u کاهش می‌یابد.
  - ✓ تمرین: عکس رابطه فوق را نقض کنید

ارزش اختیار خرید با استفاده از مدل دو جمله ای

T-1   T

یک دوره قبل از اعمال (انقضا)   زمان اعمال (انقضا)

با فرض مشخص بودن S_T: $C_T = \max [0, (S_T - K)]$

C_{T-1}

جهش بالا

$C_{Tu} = \max [0, (S_{Tu} - K)] = \max [0, S_{T-1}(1+u) - k]$

جهش پایین

$C_{Td} = \max [0, (S_{Td} - K)] = \max [0, S_{T-1}(1+d) - k]$

تشکیل سبد اهرمی برای قیمت گذاری اختیار خرید

- ✓ تشکیل سبد اهرمی برای محاسبه C_{T-1}
- ✓ ایجاد سبدی که در زمان T عایدی معادل عایدی اختیار خرید داشته باشد:
- ✓ قرض گرفتن مبلغ B تومان با نرخ r و خرید تعداد A از دارایی پایه

اگر سبد معادل اختیار خرید باشد باید: $A \geq 0$ و $B \leq 0$ و $AS_{T-1} \geq |B|$ یا $C \geq 0$

جهش بالا: $AS_{Tu}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+u) + B(1+r) = C_{Tu}$

$AS_{T-1}+B$

$= C_{T-1}$

جهش پایین: $AS_{Td}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+d) + B(1+r) = C_{Td}$

استخراج فرمول C_{T-1}

$C_{T-1}=AS_{T-1}+B$

جهش بالا: $AS_{Tu}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+u) + B(1+r) = C_{Tu}$

جهش پایین: $AS_{Td}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+d) + B(1+r) = C_{Td}$

پس از ساده سازی:

$$\begin{cases} A = \dfrac{C_{Tu} - C_{Td}}{S_{Tu} - S_{Td}} \\ B = \dfrac{(1+u)C_{Td} - (1+d)C_{Tu}}{(u-d)(1+r)} \end{cases}$$

با جایگذاری:

$$C_{T-1} = \frac{\dfrac{(r-d)}{(u-d)}C_{Tu} + \dfrac{(u-r)}{(u-d)}C_{Td}}{(1+r)}$$

احتمال جهش بالا

احتمال جهش پایین

$$\begin{cases} P(u) = P = \dfrac{r-d}{u-d} \\ P(d) = 1 - P = \dfrac{u-r}{u-d} \end{cases}$$

شکل عمومی: ارزش فعلی میانگین وزنی C_u و C_d

$$C_{T-1} = \frac{PC_{Tu} + (1-P)C_{Td}}{1+r}$$

مثال مدل دو جمله ای تک دوره ای

یک قرارداد اختیار خرید با قیمت توافقی 10/2 برای یک دوره منعقد نموده ایم در حالی که $S_{T-1}=10$ و $u=0.05$ و $d=-0.01$ و $r=0.03$ باشد.

$$S_{Tu} = (1 + 0.05) * 10 = 10.5$$

$$S_{Td} = (1 - 0.01) * 10 = 9.9$$

$$P(u) = P = \frac{r-d}{u-d} = \frac{0.04}{0.06} = 0.67$$

احتمال جهش بالا

$$P(d) = 1 - P = 0.33$$

احتمال جهش پایین

$$C_u = max[0, (10.5 - 10.2)] = 0.3$$

$$C_d = max[0, (9.9 - 10.2)] = 0$$

$$C_{T-1} = \frac{PC_{Tu} + (1-P)C_{Td}}{1+r} = \frac{(0.67 * 0.3) + (0.33 * 0)}{1.03} = 0.213$$

مدل دو دوره ای قیمت گذاری اختیار خرید

✓ u و d در دو دوره ثابت هستند.

✓ در طول دوره سود تقسیم نمی شود.

T-2 — T-1 — T

دو دوره قبل از انقضا — یک دوره قبل از انقضا — زمان انقضا

S_{T-2}

جهش بالا: $S_{T-1,u}=S_{T-2}(1+u)$

جهش پایین: $S_{T-1,d}=S_{T-2}(1+d)$

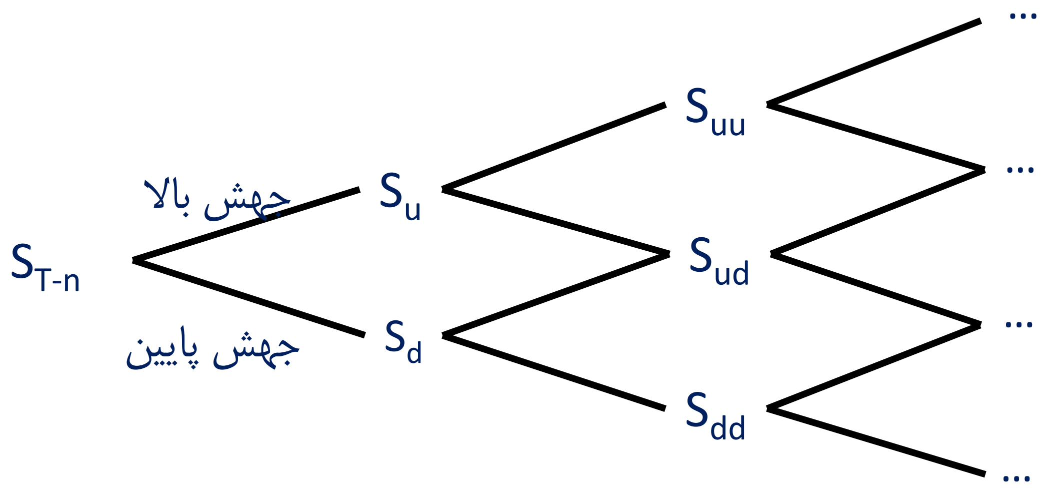
$S_{T,uu}=S_{T-2}(1+u)^2$

$S_{T,ud}=S_{T-2}(1+d)(1+u)$

$S_{T,dd}=S_{T-2}(1+d)^2$

$$C_{T-2}=\frac{P^2C_{T,uu}+2P(1-P)C_{T,ud}+(1-P)^2C_{T,dd}}{(1+r)^2}$$

مدل n دوره ای قیمت گذاری اختیار خرید



- ✓ U و d در کل دوره‌ها ثابت هستند.
- ✓ در طول دوره سود تقسیم نمی شود.

$$C_{T-n} = C = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P^j(1-p)^{n-j}max[\ 0,(1+u)^j(1+d)^{n-j} * S_{T-n} - K]$$

فرض حذف موارد Out of the Money

✓ اگر فرض کنیم a حد اقل تعداد جهش بالاست که به ازای آن اختیار خرید In the money میشود می توانیم مقادیر مربوط به اختیار خرید Out of the money را از فرمول حذف کنیم

$$C = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}\underbrace{P^j(1-p)^{n-j}}\Big[\overbrace{\underbrace{(1+u)^j(1+d)^{n-j}}_{S_{T/j}} * S_{T-n}}^{C_{T/j}} - K\Big]$$

ضریب $S_{T/j}$ احتمال $S_{T/j}$

$S_{T/j} = (1+u)^j\,(1+d)^{n-j}\,S_{T-n}$

$C_{T/j} = (1+u)^j\,(1+d)^{n-j}\,S_{T-n} - K$

مثال مدل چند دوره ای قیمت گذاری اختیار خرید

اگر $r=1\%$ ، $d=-4\%$ ، $u=5\%$ ، $n=4$، $K=25$، و $S_{t-4}=30$ باشد:

$$P(u) = P = \frac{r-d}{u-d} = \frac{5}{9} = .55$$

$$P(d) = 1 - P = 0.45$$

$$C_{T-4} = C = \frac{1}{(1+01)^4} \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} P^4 (1-p)^{4-j} max[\ 0, (1+.05)^j (1-.04)^{4-j} * S_{T-4} - K]$$

$$C_{T-4} = C = \frac{1}{(1+01)^4} \binom{4}{0} (.55)^0 (.45)^4 max[\ 0, (1.05)^0 (.96)^4 * 30 - 25]$$

$$+ \frac{1}{(1+01)^4} \binom{4}{1} (.55)^1 (.45)^3 max[\ 0, (1.05)^1 (.96)^3 * 30 - 25]$$

$$+ \frac{1}{(1+01)^4} \binom{4}{2} (.55)^2 (.45)^2 max[\ 0, (1.05)^2 (.96)^2 * 30 - 25]$$

$$+ \frac{1}{(1+01)^4} \binom{4}{3} (.55)^3 (.45)^1 max[\ 0, (1.05)^3 (.96)^1 * 30 - 25]$$

$$+ \frac{1}{(1+01)^4} \binom{4}{4} (.55)^4 (.45)^0 max[\ 0, (1.05)^4 (.96)^0 * 30 - 25] = 3.65$$

مدل یک دوره ای قیمت گذاری اختیار فروش

T-1 — T

یک دوره قبل از انقضا — زمان انقضا

S_{T-1}

جهش بالا $S_{Tu}=S_{T-1}(1+u)$ $P_{Tu}=\max[0,(K-S_{Tu})]$

جهش پایین $S_{Td}=S_{T-1}(1+d)$ $P_{Td}=\max[0,(K-S_{Td})]$

برای قیمت گذاری سبدی از A سهم و B اوراق قرضه تشکیل می دهیم:

اگر سبد معادل اختیار فروش باشد باید: $B\geq 0$ و $A\leq 0$

$AS_{T-1}+B$

$=P_{T-1}$

جهش بالا $AS_{Tu}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+u) + B(1+r) = P_{Tu}$

چون سبد برابر اختیار فروش است

جهش پایین $AS_{Td}+B(1+r) = AS_{T-1}(1+d) + B(1+r) = P_{Td}$

استخراج فرمول P_{T-1}

پس از ساده سازی:

$$\begin{cases} A = \dfrac{P_{Tu} - P_{Td}}{S_{Tu} - S_{Td}} & \text{A≤0} \\ B = \dfrac{(1+u)C_{Td} - (1+d)C_{Tu}}{(u-d)(1+r)} & \text{B≥0} \end{cases}$$

با جایگذاری:

$$P_{T-1} = \frac{\dfrac{(r-d)}{(u-\mathrm{d})}P_{Tu} + \dfrac{(u-r)}{(u-\mathrm{d})}P_{Td}}{(1+\mathrm{r})}$$

احتمال جهش بالا

$$p(u) = p = \frac{r-d}{u-d}$$

احتمال جهش پایین

$$p(d) = 1 - p = \frac{u-r}{u-d}$$

شکل عمومی: ارزش فعلی میانگین وزنی C_uو C_d

$$P_{T-1} = \frac{pP_{Tu} + (1-p)P_{Td}}{1+r}$$

دو نکته

- ✓ اختیار فروش امریکایی نمی تواند کمتر از K-S معامله شود. چون در این صورت دارنده آن را اعمال می‌کند. بنابراین اگر قیمت کوچکتر از K-S شد، قیمت برابر K-S فرض می‌شود.

- ✓ چون اختیار فروش امریکایی امکان اعمال بلادرنگ دارد مدل دوجمله‌ای چند دوره‌ای برای آن کابرد ندارد و باید از سررسید یک دوره-یک دوره به عقب برگشته و قیمت‌گذاری کنید.

رویکرد PDE با استفاده از مونت کارلو

ریسک و آینده مبهم

- ✓ آینده مهم است چون برای تصاحب آن رقابت وجود دارد. و باید برای به دست اوردن بخشی از آینده بجنگید.
- ✓ آنچه نمی دانیم و نمی دانیم که نمی دانیم در رقابت نقش ندارد چون همه مردم در مورد آن مساوی اند.

نمی دانمِ آینده ناشی از

عدم قطعیت (Uncertainty)

نوسان (Volatility)

پیچیدگی (Coplexity)

ابهام (Ambiguity)

پاسخ:

پیش‌گویی غیر معقول

پیش‌بینی با خطاست.

آینده یک تاریکی مطلق است و من یک چراغ هر چند کم سو هستم.

این چراغ شما را در تصاحب آینده نسبت به رقبا جلو می‌اندازد.

متغیر تصادفی و تابع احتمال گسسته

- ✓ تابعی که بتواند به هر مقدار متغیر تصادفی، احتمال آن را نسبت دهد، تابع احتمال گسسته عرفاً با f(x) و در درس ما با f(s) نشان داده می‌شود.

- ✓ دامنه تابع احتمال گسسته مقادیر متغیر تصادفی (S) و برد آن احتمال هریك از مقادیر متغیر تصادفی P (s) است.

مقادیر متغیر تصادفی	قیمت ابتدای فروردین	S	s_1	s_2	s_3
احتمال هریک از مقادیر	احتمال مقادیر مختلف قیمت	P(S)	$P(s_1)$	$P(s_2)$	$P(s_3)$

مقادیر متغیر تصادفی	قیمت فروردین ماه	S	۲۶۰	۲۸۵	۲۹۵
احتمال هریک از مقادیر	احتمال مقادیر مختلف قیمت	P(S)	۰/۳ P (260)	۰/۵ P (285)	۰/۲ P (295)

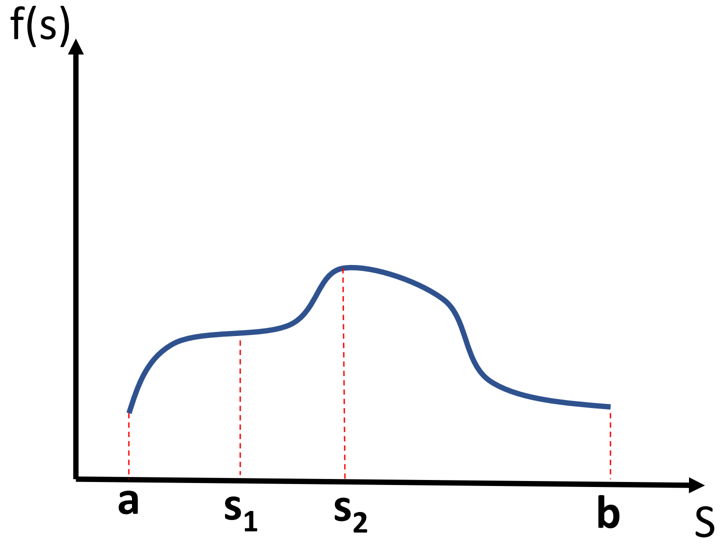
S: قیمت نقد سهام (متغیر تصادفی)

P(S): احتمال قیمت سهام

تابع چگالی احتمال پیوسته

متغیر تصادفی پیوسته همان متغیر تصادفی است که در آن فضای نمونه و به تبع آن متغیر تصادفی حالات و مقادیر پیوسته به خود می‌گیرد.

دامنه تابع احتمال پیوسته مقادیر متغیر تصادفی (S) و برد آن مقدار چگالی متغیر تصادفی f(s) است.
نمایش جدولی تابع چگالی احتمال غیر ممکن است و آن را به صورت نموداری و جبری نشان می‌دهند.



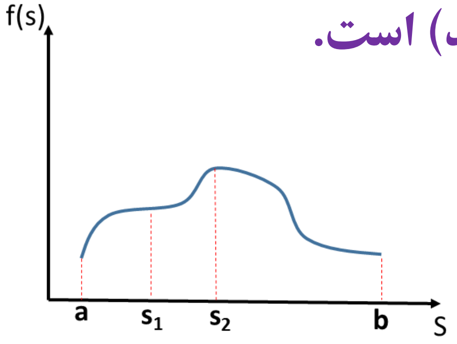
مثال از شکل نموداری تابع چگالی احتمال (قیمت در فاصله a تا b تعریف شده است.)

مثال‌هایی از شکل جبری تابع چگالی احتمال

$$f(s) = e^{s}$$

$$f(s) = s^{e}$$

خواص تابع چگالی احتمال پیوسته



مساحت کل زیر منحنی (در بخش تعریف شده آن) برابر یک (صد درصد) است.

$$P(a < s < b) = \int_a^b f(s)\,.\,ds = 1$$

احتمال نقطه (احتمال برابری قیمت با عدد ثابت) برابر صفر است.

$$P(s_1) = P(S = s_1) = \int_{s_1}^{s_1} f(s)\,.\,ds = 0$$

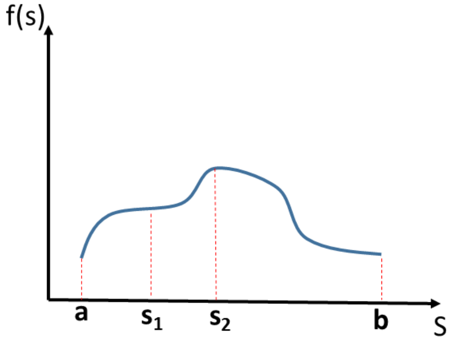
احتمال یک دامنه از متغیر تصادفی برابر سطح زیر منحنی (انتگرال تابع در آن فاصله) است.

$$P(s_1 < s < s_2) = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,.\,ds$$

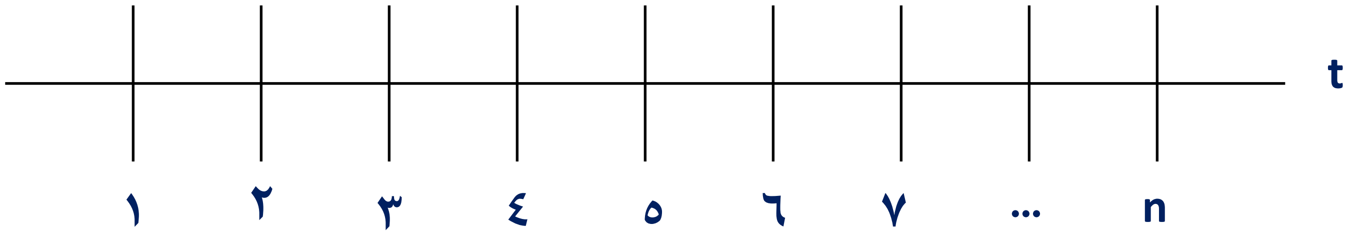
مقدار انتظاری متغیر تصادفی برابر امید ریاضی تابع به شرح زیر است.

$$E(s) = \int_a^b s.\,f(s).\,ds$$

فرآیند تصادفی

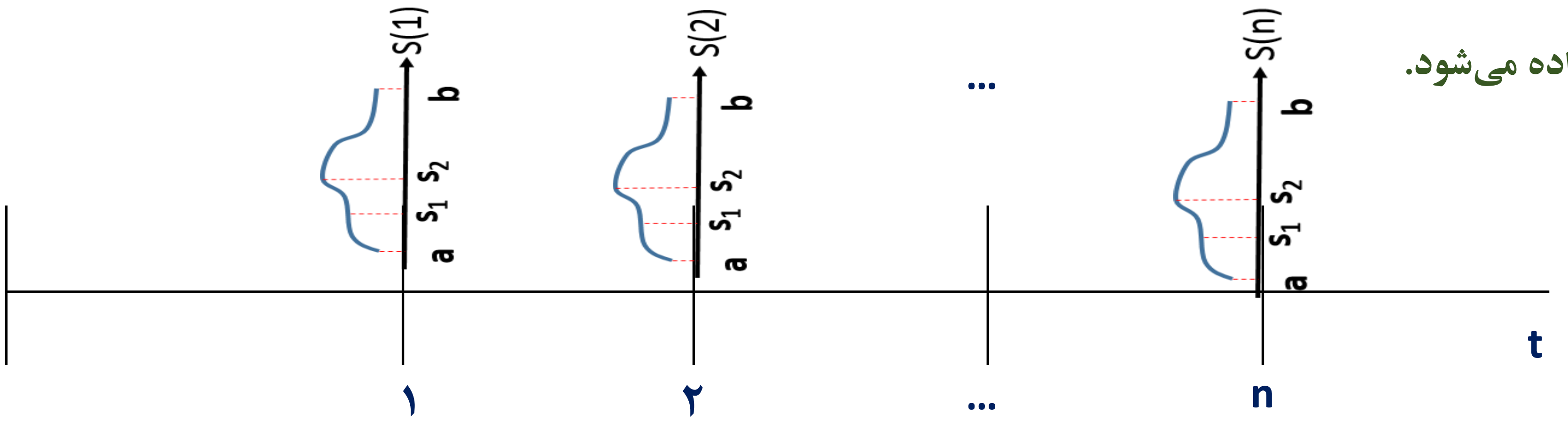


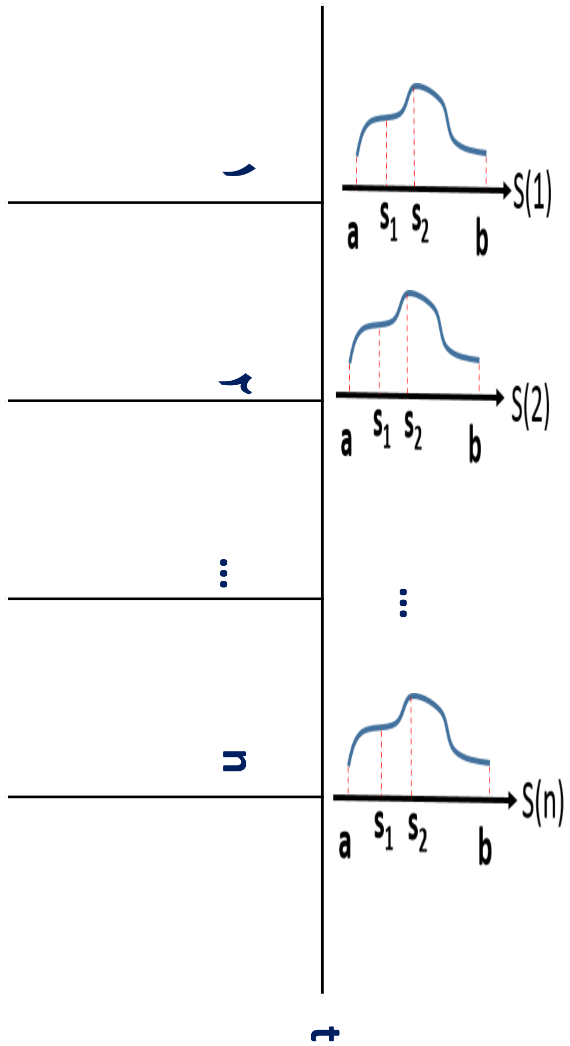
طول زمان به مقاطع با فاصله برابر تقسیم می‌شود.



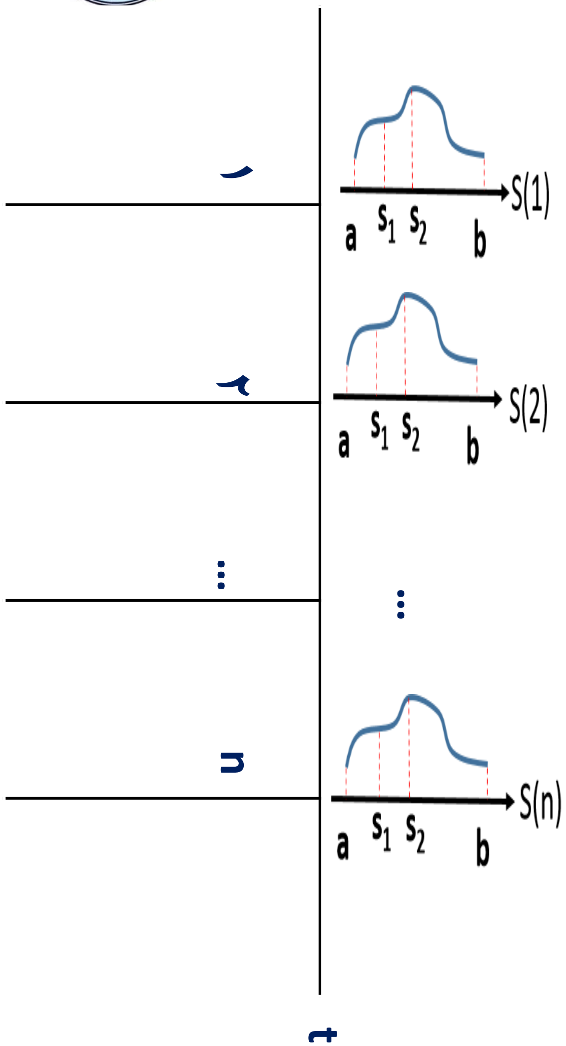
قیمت در هر مقطع زمانی t یک متغیر تصادفی S(t) محسوب می‌شود. قیمت زمان ۱ متغیری تصادفی است که با S(۱) نشان داده می‌شود. قیمت زمان ۲ متغیری تصادفی قیمت زمان n متغیری تصادفی است که با S(n) نشان داده می‌شود.

است که با S(۲) نشان داده می‌شود.




S(1)
a
s_1
s_2
b
S(2)
S(n)

برخی چالش‌های فرآیند تصادفی



شکل و پارامترهای توزیع قیمت در زمان‌های مختلف متفاوت است.

مقدار واقعی قیمت در زمان **t** بر شکل و پارامترهای توزیع آن در زمان‌های بعد **t** اثر دارد.

تعیین شکل و پارامترهای توزیع قیمت در زمان‌های آینده بسیار پیچیده و حتی غیر ممکن است.

بدون اطلاعات کافی درباره توزیع قیمت در زمانی‌های مختلف، نمی‌توان توزیع قیمت در زمان انقضا را تعیین کرد.

بدون توزیع قیمت در زمان **T** امکان محاسبه امید ریاضی به عنوان پراکسی S_T وجود ندارد.

بدون داشتن S_T امکان محاسبه قیمت اختیار وجود ندارد.

وینر در فیزیک و براون در حوزه احتمالات راه‌حل‌هایی برای مساله ارائه کردند.

فرآیند وینر شکل خاصی از فرآیند تصادفی

- وینر مکان یک ذره را در یک مخزن آب مطالعه کرد.
- در هر لحظه از زمان مکان ذره در مخزن آب یک متغیر تصادفی است.
- مکان ذره در مخزن آب یک فرآیند تصادفی است که با $W(t)$ نشان داده می‌شود.
- مکان ذره در لحظه بعد بستگی به قدرت نیروهایی دارد که از جهات مختلف مولکول‌های آب به آن وارد می‌کنند.
- در زمان حال (زمان صفر) ذره در مکان $W(۰)$ قرار دارد که مقدار قطعی دارد.
- هدف وینر تعیین مکان ذره در زمان t است یعنی $W(t)$

فرآیند وینر

مکان ذره در زمان صفر، صفر است. W(۰)=۰

تغییرات مکان ذره (Δw) دارای توزیع نرمال است با میانگین صفر و واریانس Δt

$$\Delta w \sim N(0,\Delta t)$$

و t=0+Δt= Δt بنابراین

Δw دارای توزیع نرمال است با میانگین صفر و واریانس t. یعنی: $\Delta w \sim N(0,t)$

توزیع w(t) چیست؟

w(t) بر مبنای w(0) تعیین می‌شود، یعنی w(t)=w(0)+Δw

چون W(0)=0 پس w(t)=0+Δw= Δw

میانگین: $w(t)=w(0)+\Delta W \Rightarrow \mu_{w(t)}=\mu_{w(0)}+\mu_{\Delta W}=0+0=0$

واریانس $\sigma^2_{w(t)}=\sigma^2_{w(0)}+\sigma^2_{\Delta W}=0+\Delta t=\Delta t=t$

چون W(0) صفر است پس Δw و W(0) مستقل از یکدیگرند.

بنابراین w(t) دارای توزیع نرمال است با میانگین صفر و واریانس t

$$w(t)\sim N(0,t)$$

حرکت براونی

قیمت دارایی پایه (S) با میانگین μ و انحراف معیار σ از حرکت براونی پیروی می‌کند اگر: $\frac{S(t)-\mu t}{\sigma} = w(t)$

به عبارت دیگر:

$$S(t) = \mu t + \sigma w(t)$$

توزیع S(t) چگونه است؟

امید ریاضی S(t):

$$E[S(t)] = E[\mu t + \sigma w(t)] = E(\mu t)+E[\sigma w(t)] = \mu t + \sigma E\big(w(t)\big) = \mu t+\sigma(0) = \mu t$$

و با توجه به اینکه $Cov[\mu t, \sigma w(t)] = 0$ واریانس S(t) برابر است با:

$$Var[S(t)] = Var[\mu t + \sigma w(t)] = Var(\mu t)+Var[\sigma w(t)] = ۰ + \sigma^2 Var[w(t)] = \sigma^2 t$$

بنابراین S(t) دارای توزیع نرمال است با میانگین μt و واریانس $\sigma^2 t$. یعنی: $S(t) \sim N(\mu t , \sigma^2 t)$

به عنوان مثال S(9) دارای توزیع نرمال است با میانگین ۹μ و واریانس ۹ σ^2. یعنی: $S(9) \sim N(۹\mu , ۹\sigma^2)$

دیفرانسیل فرآیند تصادفی

اگر بپذیریم قیمت به صورت پیوسته تغییر می‌کند، تغییرات آن $dS(t)$ از دیفرانسیل زیر پیروی می‌کند.

$$dS(t) = \mu dt + \sigma dw(t)$$

اگر $S(0)=0$ را الزامی ندانیم، و $S(0)=a$ را بپذیریم، یعنی a را به همه مقادیر $S(t)$ اضافه کرده‌ایم.

از طرفی اگر میانگین و واریانس را تابع زمان بدانیم، یعنی در طول زمان تغییر کند، داریم:

$$dS(t) = \mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dw(t)$$

برای محاسبه $S(t)$ از دو طرف معادله فوق انتگرال می‌گیریم:

$$S(t) = s(0) + \int_0^t \mu(h) d_h + \int_0^t \sigma(h)\, dw(h)$$

که در آن h همان زمان است که به دلیل استفاده از t برای حد بالا، از hاستفاده شده است.

محاسبه انتگرال نسبت به فرآیند تصادفی $w(h)$ کار سختی بود که بالاخره ایتو آن را محاسبه کرد.

فرآیند براونی برای بازده

برای جلوگیری از منفی شدن قیمت سهام از log s استفاده می‌شود.

از طرفی تغییر در لگاریتم قیمت برابر بازده آن است. یعنی:

$$\Delta log\ s = log\ s(t) - log\ s(t-1) = \frac{dS(t)}{S(t-1)}$$

با اعمال تغییر فوق، مدل حرکت براونی برابر است با:

$$\frac{dS(t)}{S(t-1)} = \mu t + \sigma w(t)$$

و dS(t) برابر است با:

$$dS(t) = S(t-1)\mu dt + S(t-1)\sigma dw(t)$$

و با انتگرال گیری و اعمال فرمول ایتو S(t) برابر است با:-

$$S(t) = S(t-1)exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,.Z(t)\right]$$

مساله تعیین قیمت اختیار

هدف محاسبه قیمت اختیار خرید است برابر ارزش فعلی تفاوت قیمت نقد زمان انقضا و قیمت توافقی

$$C = \max(0, S_T - k)e^{-rT} \quad \text{یا} \quad C = \frac{\max(0, S_T - k)}{(1+r)^T}$$

K قیمت توافقی است و S_T قیمت نقد زمان اعمال که در زمان صفر (زمان محاسبه C) مقدار آن معلوم نیست.

- ✓ معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) رویکرد مونت کارلو
  - ✓ روش اول با فرض یک دوره تا سررسید
  - ✓ روش دوم با فرض n دوره تا سررسید

محاسبه قیمت اختیار خریدبه صورت یک مرحله‌ای

Z(t) متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد (میانگین صفر و انحراف معیار یک) است،

الف) برای z(t) تعداد زیادی مقدار تصادفی تعیین کنید.

ب) به ازای هر مقدار از $Z(t)$ معادله زیر را حل کنید.

$$S(T)_i = S(\mathrm{T}-1)exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,.\,Z(t)_i\right]$$

ج) به ازای مقدار i ام از Z(t) یک مقدار برای S(T) وجود دارد.

د) میانگین مقادیر حاصله S(T) امید ریاضی یا مقدار انتظاری قیمت نقد در زمان سررسید است.

هـ) با استفاده از فرمول زیر قیمت اختیار را محاسبه کنید.

$$C = \max(0, S_T - k)e^{-rT}$$

مثال تخمین S(T) به صورت یک مرحله ای

فرض کنید یک ماه تا زمان سررسید اختیار خریدی با قیمت توافقی ۳۵۱تومان باقی مانده است. اگر قیمت نقد دارایی پایه در زمان حال ۳۵۰ تومان، نرخ بازده مورد انتظار ۰/۰۲ و انحراف معیار بازده برابر ۰/۰۰۵ و بازده بدون ریسک ۰/۰۱ باشد:

الف) قیمت نقد زمان اعمال را محاسبه کنید.

ب) قیمت اختیار را برای زمان حال با رویکرد مونت کارلو و به کمک PDE به دست آورید.

حل مثال

با تعریف متغیرها به صورت زیر:

$$K = 351, \quad S(T-1) = 350, \quad \mu = 0.02, \quad \sigma = 0.005, \quad \Delta t = 1, \quad r = 0.01$$

و اولین مقدار تصادفی z(t) که برابر ۱/۳– به دست آمد، داریم:

$$S(T) = 350.exp\left[\left(0.02 - \frac{1}{2}(0.005)^2\right)(1) + 0.005\sqrt{1}\,.(-1.3)\right] = 359.4$$

این عدد به ازای ده مقدار تصادفی Z(T) به شرح جدول زیر به دست آمد.

Z(t)	-1/3	1/8339	-2/2588	0/8622	0/3188	-1/3077	-0/4336	0/3426	3/5784	2/7694
S(Ti)	359.4	353.2	346.1	351.5	350.6	352.3	349.2	350.6	356.3	354.9

میانگین مقادیر فوق از S(T) برابر است ۳۵۲/٤پس:

$$C = \max(0, S_T - k)\, e^{-rT} = \max(0{,}352.4 - 351)(1.01005) = \max(0{,}1.4)(1.01005)$$
$$= 1.4(1.01005) = 1.414$$

قیمت اختیار خرید برابر است با ۱/٤۱٤

محاسبه قیمت اختیار به صورت چندمرحله ای

با داشتن معادله زیر:

$$S(\mathrm{t}) = S(\mathrm{t}-1)exp\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,.Z(t)\right]$$

و با توجه به اینکه Z(t) متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد (میانگین صفر و انحراف معیار یک) است،

الف) برای z(t) یک مقدار تصادفی تعیین کنید.

ب) زمان حال را زمان صفر فرض کنید و به ازای مقدار $Z(t)$ و قیمت نقد دارایی پایه S(۰) معادله زیر را برای محاسبه S(۱) حل کنید.

$$S(1) = S(0)exp\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,.Z(t)\right]$$

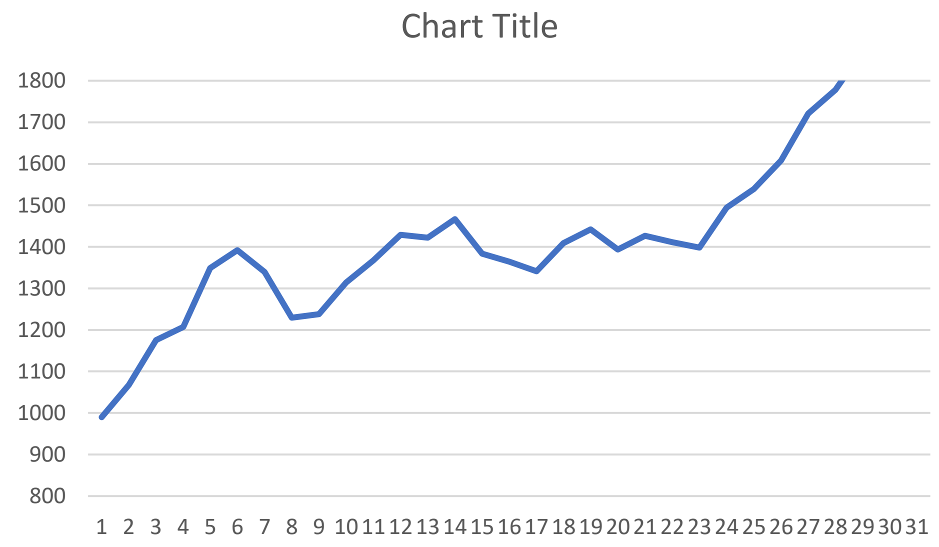
ج) مرحله الف و ب را برای محاسبه S(۲) تا S(T) تکرار کنید. نمودار S(t) را نیز ترسیم کنید.

مثال بخش اول مدل چندمرحله‌ای

اطلاعات زیر برای یک اختیار خرید که تاریخ سررسید آن ۳۰ ماه بعد است، در دست است:

$$K = 1800, \quad S(0) = 990, \quad \mu = 0.025, \quad \sigma = 0.01, \quad \Delta t = 1, \quad r = 0.01$$

یک نمونه نمودار قیمت براساس روش PDE مبتنی بر مونت کارلو برای قیمت دارایی پایه ترسیم کنید.



این نمودار یک سناریو از بی نهایت سناریویی است که قیمت دارایی پایه می‌تواند برخوردار باشد.

طبق این سناریو، قیمت نقد زمان سررسید ۱۵۲۹/۵ است.

محاسبه قیمت اختیار به صورت چندمرحله ای (ادامه)

د) مراحل الف تا ج را n بار تکرار کنید (مثلا ۱۰۰۰ یا ۲۰۰۰ بار)

هـ) نتیجه مرحله د می‌شود n سناریو برای قیمت و به تبع آن n مقدار برای قیمت زمان انقضا

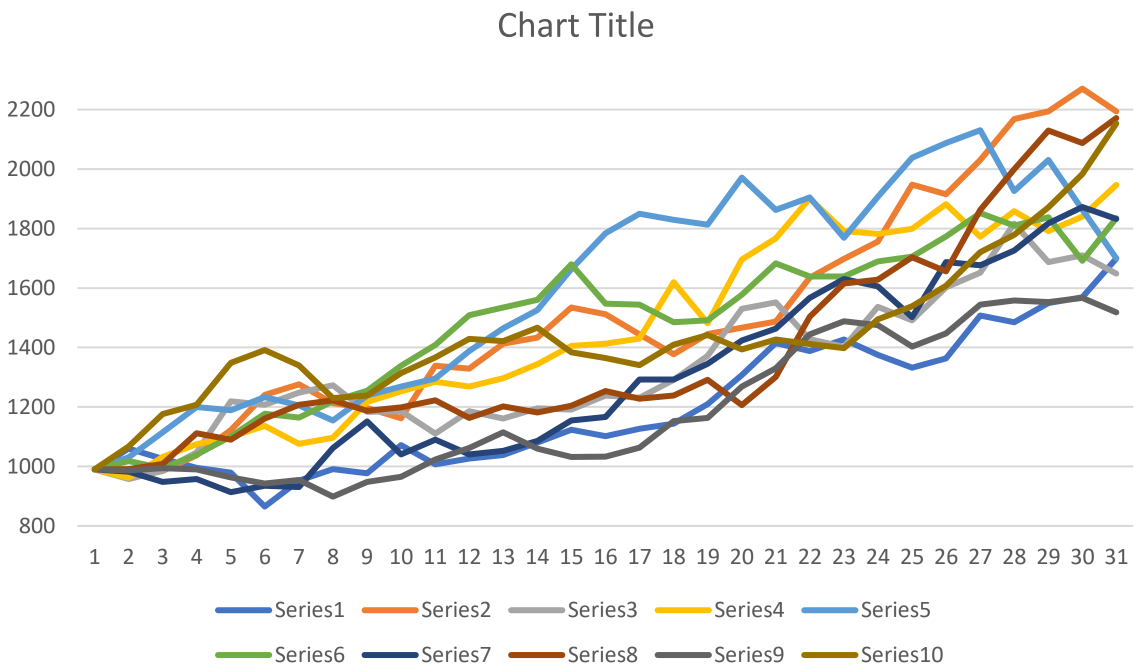
و) میانگین قیمت‌های زمان انقضا را محاسبه کنید و آن را به عنوان قیمت تخمینی زمان اعمال بپذیرید.

ز) قیمت تخمینی بند و را در فرمول قیمت اختیار خرید (به صورت زیر) قرار داده و C را محاسبه کنید.

$$C = \max(0, S_T - k)e^{-rT}$$

مثال بخش دوم مدل چندمرحله‌ای

نمودار زیر ده سناریوی نمونه را برای مثال قبل نشان می‌دهد (n=۱۰).



میانگین قیمت‌های زمان انقضا ۱۸۷۰ تومان و طبق فرمول زیر قیمت اختیار خرید۱۲۷/۵ تومان است.

$$C = \max(0, S_T - k)\, e^{-rT} = \max(0{,}1870 - 1800)(1.822119) = \max(0, 70)(1.822119)$$

$$= 70(1.822119) = 127.5$$

مدل قیمت‌گذاری بلک-شولز

فروض مدل بلک شولز

- ✓ بازار سرمایه کامل است و هزینه معاملاتی و مالیات وجود ندارد.
- ✓ امکان دریافت و پرداخت وام با نرخ بدون ریسک برای سرمایه گذاران
- ✓ سهام سود نقدی ندارد و بر اساس این فرض اختیار معامله اروپایی و امریکایی یک ارزش پیدا می کنند.
- ✓ بازار به طور پیوسته به انجام معاملات می پردازد.
- ✓ قیمت سهام از نوعی فرایند تصادفی به نام فرآیند انتشار پیروی می کند.

توزیع قیمت دارایی ۱

در مدل بلک شولز فرض می شود که قیمت سهام (دارایی موضوع قرارداد) از فرایند تصادفی انتشار پیروی می کند.

تعریف فرایند انتشار:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\Delta W$$

بازده سهام: $\frac{\Delta S}{S}$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$$

μ: بازده مورد انتظار در طول واحد زمانی Δt (در طول زمان ثابت فرض می‌شود.)

σ: انحراف معیار بازده در طول واحد زمانی Δt (در طول زمان ثابت فرض می‌شود.)

w: متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t (فرایند وینر)

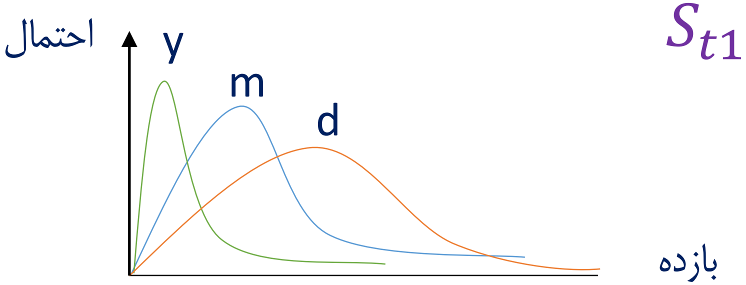
Δw: تغییر w در مقطع کوچکی از زمان که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Δt و $Cov(\Delta w_1, \Delta w_2) = 0$

توزیع قیمت دارایی ۲

اگر قیمت از فرایند انتشار پیروی کند:

✓ بازده سهام دارای توزیع نرمال لگاریتمی است.

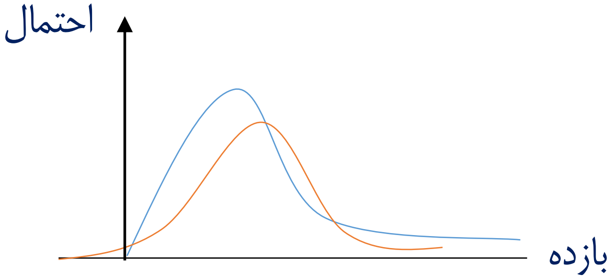
$$\frac{S_{t2}}{S_{t1}} \sim LogN$$



انحراف معیار بازده ضریبی از جذر زمان است

$$\sigma_Y = \sqrt{12}\sigma_m \qquad \sigma_m = \sqrt{30}\sigma_d$$

بازده در هر دوره نمی تواند از 100%- کمتر شود یعنی اگر بازده توزیع نرمال لگاریتمی داشته باشد حداقل بازده ممکن 100%- است.



مدل بلک شولز برای اختیار خرید

مثال در اکسل

فرمول مدل بلک شولز:

$$C = S.N(d_1) - Ke^{-rT}.N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{Ln\left(^{S}/_{K}\right) + \left(r + {^{\sigma^2}/_2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

S: قیمت نقد دارایی موضوع قرارداد
K: قیمت توافقی
r: نرخ بازده بدون ریسک
T: زمان باقی مانده تا سررسید
e^{-rT}: عامل ارزش فعلی بهره مرکب پیوسته
N(d): تابع تجمعی توزیع نرمال استاندارد
σ: انحراف معیار بازده دارایی

منطق مدل بلک شولز

با فرض شرایط اطمینان ، هم قیمت سهام و هم قیمت اختیار بر اساس نرخ بازده بدون ریسک rf تنزیل می شود.

اگر سرمایه گذار بداند ST<K در نتیجه C=0 است.
اگر ST>K در نتیجه ارزش اختیار خرید در سررسید برابر ارزش ذاتی آن خواهد بود C=ST-K بنا بر این قیمت اختیار خرید برابر است با:

$$C = \frac{S_T - K}{\left(1 + r_f\right)^T} = \frac{S_0\left(1 + r_f\right)^T - K}{\left(1 + r_f\right)^T} = S_0 - \mathrm{K}\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

$$C = S_0 - \mathrm{K}e^{-r_f T}$$ با فرض تنزیل مرکب پیوسته

رابطه فوق با وجود N(d1) وN(d2) به مدل بلک شولز تبدیل می شود که N(d2) احتمال سود آور بودن اختیار خرید در شرایط بدون ریسک است.

مدل بلک شولز برای اختیار فروش

مثال در اکسل

فرمول مدل بلک شولز:

$$p = S.[N(d_1) - 1] - Ke^{-rT}.[N(d_2) - 1] = -S.N(-d_1) + Ke^{-rT}.N(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{Ln\left({}^{S}/_{K}\right) + \left(r + {}^{\sigma^2}/_{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

S: قیمت نقد دارایی موضوع قرارداد
K: قیمت توافقی
r: نرخ بازده بدون ریسک
T: زمان باقی مانده تا سررسید
e^{-rT}: عامل ارزش فعلی بهره مرکب پیوسته
N(d): تابع تجمعی توزیع نرمال استاندارد
σ: انحراف معیار بازده دارایی

چند نکته در مورد قیمت گذاری اختیار

- اگر سهام از فرایند انتشار پیروی کند ، بازده مرکب پیوسته آن نرمال است.
- اگر قیمت سهام از فرایند جهشی پیروی کند، مدل تعدیل شده بلک شولز باید استفاده شود.
- واریانس بازده ثابت نیست،بنا بر این از مدل بلک شولز با فرض واریانس متغیر استفاده می شود.
- اگر تعداد دوره ها در مدل دو جمله ای به سمت بی نهایت میل کند و طبیعتا طول فواصل زمانی به سمت صفر، مدل دو جمله ای و بلک شولز یکی می شوند به نجوی که:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1$$

$$\mathrm{P}(u) = 0.5 + 0.5\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{T}{N}}$$

مثال پارامترهای دو جمله‌ای در ارتباط با بلک شولز

مثال: اگر

μ=0.2 σ=0.6

N=4 T=4 ماه

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 = e^{0.6\sqrt{\frac{0.333}{4}}} - 1 = 0.18911$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 = 0.15903$$

$$\mathrm{P}(u) = 0.5 + 0.5\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{T}{N}} = 0.5 + 0.5\left(\frac{0.2}{0.6}\right)\sqrt{\frac{0.333}{4}} = 0.54811$$

نحوه محاسبه σ

- ✓ واریانس بازده دارایی پایه
- ✓ واریانس بازده دارایی پایه
- ✓ واریانس واقعی آن چیزی است که بازار به عنوان واریانس بازده دارایی پایه مد نظر دارد
- ✓ واریانس واقعی را واریانس ضمنی (Implied Volatility) می‌نامیم.

واریانس تاریخی

مثال در اکسل

می دانیم:

$$r_{t2} = Ln(\frac{S_{t2}}{S_{t1}})$$

پس میانگین بازده دارایی پایه:

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t$$

نوسانات بازده دارایی پایه (Volatility) :

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2$$

محاسبه نوسان ضمنی (Implied Volatility)

مثال در اکسل

با توجه به فرمول بلک شولز:

$$C = S.N(d_1) - Ke^{-rT}.N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{Ln\left(S/_K\right) + \left(r + \sigma^2/_2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

در مقاطع مختلف C ، S ، K ، r و T را بدست آورید که همه در بازار معلوم شده است . با قرار دادن آنها در فرمول σ را بدست می آوریم که همان نوسان ضمنی (Implied Volatility) است.

حال که برای هر دوره یک σ داریم ، هدف تلفیق نوسان ضمنی برای وصول یه یک σ قابل قبول در قیمت گذاری اختیار خرید است.

نحوه تلفیق نوسانات ضمنی گذشته

- ✓ میانگین ساده
- ✓ تخمین سری زمانی $\sigma_t = \alpha + \beta\sigma_{t-1} + \varepsilon$
- ✓ تخمین رگرسیون چند متغیره $\sigma_t = \alpha + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_n F_n + \varepsilon$
- ✓ شبکه عصبی
- ✓ سایر تکنیک‌های پیش‌بینی

بهبود محاسبه نواسانات دارایی پایه

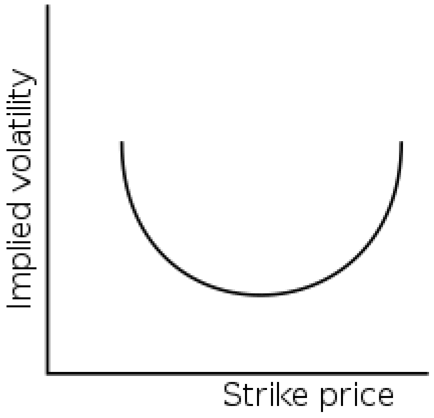
- ✓ استفاده ار قیمت High و Low هر دوره در محاسبه واریانس
- ✓ استفاده از قیمت Openو Close هر دوره در محاسبه واریانس
- ✓ لحاظ کردن قیمت تمام معاملات و نیز شکاف قیمتی (bid-ask)
- ✓ استفاده از واریانس شرکت های مشابه برای کنترل شرایط خاص
- ✓ شرکت های مشابه شرکت هایی هستند که هزینه ثابت و متغیر، ساختار سرمایه و نقدینگی و غیره در آنها با یکدیگر برابر باشند.

تلفیق نوسانات ضمنی

- ✓ میانگین وزنی نوسانات ضمنی به نحوی که هر کدام وزنی برابر $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ داشته باشد.
- ✓ میانگین وزنی نوسانات ضمنی به نحوی که هر کدام وزنی برابر $\frac{\partial C/C}{\partial \sigma/\sigma}$ داشته باشد.
- ✓ میانگین وزنی نوسانات ضمنی به نحوی که هر کدام وزنی برابر حجم معامله اختیار با آن نوسان ضمنی است.
- ✓ میانگین غیر وزنی یا ساده
- ✓ نوسانات ضمنی با بالاترین وزن

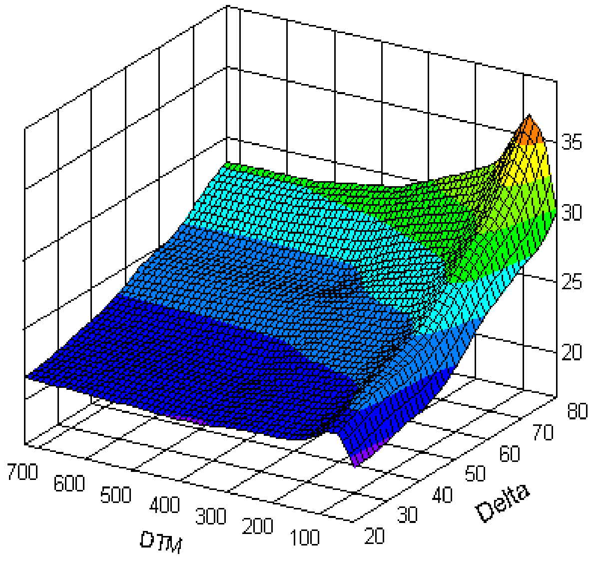
لبخند نوسان

- ✓ برای یک تاریخ انقضای مشخص اختیارهایی با قیمتهای توافقی متفاوت نوسانات ضمنی متفاوتی دارند.
- ✓ نوسان ضمنی به عنوان تابعی از قیمت توافقی
- ✓ نوسان ضمنی تابعی درجه دو حداقل است از قیمت توافقی. یعنی تا جایی با افزایش قیمت توافقی نوسان زیاد و سپس کاهش می یابد.
- ✓ مدلسازی لبخند نوسان حوزه فعالی در مالی کمی است.



صفحه نوسانات ضمنی

- ✓ نوسان ضمنی به عنوان تابعی درجه دوم از قیمت توافقی (moneyness) و زمان تا سررسید.
- ✓ نموداری سه بعدی از نوسان ضمنی از اختیارات مختلفی که روی یک سهم صادر شده است.



- ✓ نمایی همزمان از لبخند نوسان و term structure of volatility
- ✓ مقابل مدل سنتی بلک شولز است که یک نوسان ثابت در طول زمان، انقضا و ارزشمندی را در نظر می‌گیرد.
- ✓ در بلک شولز فرض می شود در هر نقطه از زمان یک صفحه نوسان ضمنی کاملا صاف تخمین زده می‌شود.
- ✓ نوسان ضمنی در طول زمان با پویایی غیر خطی تغییر می‌کند.

تحلیل حساسیت ها در اختیار خرید (GREEKS)

هدف در این قسمت تحلیل تاثیر σ ، S ، K ، r و T از نظر جهت و مقدار بر اختیار خرید است.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = Ke^{-rT}\left[\frac{\sigma Z(d_2)}{2\sqrt{T}} + rN(d_2)\right] > 0 \qquad Z(d) = \frac{\sigma N(d)}{\sigma d} = \frac{e^{-d^2/2}}{2\pi}$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT}[N(d_2)] < 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = TKe^{-rT}N(d_2) > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}Z(d_1) > 0$$

تحلیل حساسیت ها در اختیار فروش

هدف در این قسمت تحلیل تاثیر σ ، S ، K ، r و T از نظر جهت و مقدار بر اختیار خرید است.

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial C}{\partial T} - Ke^{-rT} > \text{یا} < 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\partial C}{\partial K} + e^{-rT} > 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1 < 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial r} - KTe^{-rT} < 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$$

مدل بلک شولز برای اختیار اروپایی با سود تقسیمی

همه چیز شبیه به قبل است ، با این تفاوت که ارزش فعلی سود های تقسیمی از S کم می کنیم

اگر سود تقسیمی گسسته باشد:

$$S^* = S - \sum Div_t\,(1+r)^{-t}$$

اگر سود تقسیمی پیوسته باشد:

$$S^* = Se^{-\mathrm{d}t}$$

d بازده نقدی سالانه

سپس S^* را به جای S در فرمول بلک شولز قرار می دهیم.

مدل قیمت‌گذاری قرارداد آتی

مدل هزینه نگهداری Cost of Carry Model

هزینه خرید، نگهداری و انتقال به خریدار برای فروشنده منهای درآمدهای آن

$$F = G(S) = S + CC - CR$$

F : قیمت پیمان آتی (Future Price)

S : قیمت نقد (قیمت بازاری زمان عقد قرارداد Spot Price)

CC : هزینه نگهداری دارایی (هزینه خرید و نگهداری کالا Carry Cost)

CR : درآمد نگهداری دارایی (جریان نقدی حاصل برای دارنده کالا Carry Return)

فروض مدل هزینه نگهداری

- ✓ کامل بودن بازار
- ✓ بی نهایت قابل تقسین بودن دارایی ها
- ✓ عدم وجود هزینه مبادله
- ✓ عدم وجود شکاف خرید و فروش
- ✓ عدم وجود محدودیت برای فروش استقراضی
- ✓ یکسان بودن قیمت های پیمان آتی و قرارداد آتی

نقش بهره در هزینه نگهداری

مثال در اکسل

هزینه خرید، نگهداری و انتقال به خریدار برای فروشنده منهای درآمدهای آن

بهره غیر مرکب

$$F=G(S)= S + SRT+CC`- CR =S(1+RT)+CC`-CR$$

بهره مرکب

$$F=S(1+R)^{T}+CC`-CR$$

R: نرخ بهره بانکی

T: طول مدت نگهداری

درامدها و هزینه‌های نگه‌داری

مثال در اکسل

هزینه‌ها	درامدها	
✓ انبارداری	✓ اجاره	✓ نرخ
✓ حمل و نقل	✓ تقسیم سود	✓ ثابت
✓ بیمه	✓ بهره	

بهره ساده و درامدها و هزینه‌های ثابت

$$F=G(S)= S + SRT+store+trans+ins-rent$$

بهره مرکب و درامدها و هزینه‌های ثابت

$$F=S(1+R)^{T} +stor+trans+ins-rent$$

انبارداری بیمه و اجاره نرخ و حمل ثابت با بهره مرکب

$$F=S(1+R+store\_r+ins\_r-rent\_r)^{T} +trans$$

سرمایه گذاری مجدد درامد اجاره

$$F=(S-rent)(1+R+store\_r+ins\_r-rent\_r)\ T +trans$$

فروض مدل هزینه نگهداری

- ✓ کامل بودن بازار
- ✓ بی نهایت قابل تقسین بودن دارایی ها
- ✓ عدم وجود هزینه مبادله
- ✓ عدم وجود شکاف خرید و فروش
- ✓ عدم وجود محدودیت برای فروش استقراضی
- ✓ یکسان بودن قیمت های پیمان آتی و قرارداد آتی

اثبات مدل هزینه نگهداری ۱

مثال در اکسل

- ✓ اگر F>S+CC-CR پس F-S-CC+CR>0

سبد زمان صفر	جریان نقدی زمان صفر	جریان نقدی زمان T
فروش آتی به F_0	0	F-ST
خرید دارایی به S_0	-S0	+ST
قرض کردن S_0 با نرخ r	+S0	-[S0+CC]
منافع دارایی	0	+CR
جمع	0	F-S0-CC+CR

- ✓ اگر F-S-CC+CR>0 فرصت آربیتراژ بدست می آید پس تقاضا برای سبد افزایش می یابد و فرصت آربیتراژ از بین میرود.

اثبات مدل هزینه نگهداری ۱

مثال در اکسل

✓ اگر $F<S+CC-CR$ پس $-F+S+CC-CR>0$

جریان نقدی زمان T	جریان نقدی زمان صفر	سبد زمان صفر
S_T-F	0	خرید آتی به F_0
$-S_T$	$+S_0$	فروش استقراضی دارایی به S_0
$-S_0$+CC	$-S_0$	قرض دادن S_0 با نرخ r
-CR	0	منافع دارایی
-F+S_0+CC-CR	0	جمع

✓ اگر $-F+S_0+CC-CR>0$ فرصت آربیتراژ بدست می آید پس تقاضا برای سبد افزایش می یابد و فرصت آربیتراژ از بین میرود.

فرض بهره مرکب پیوسته

مثال در اکسل

$F=Se^{rT}+CC`-CR$

با فرض نرخ بهره مرکب زمان پیوسته سایر درامدها و هزینه‌ها ثابت

R: نرخ بهره بانکی

T: طول مدت نگهداری

ارزش قرارداد آتی در مقابل قیمت آتی

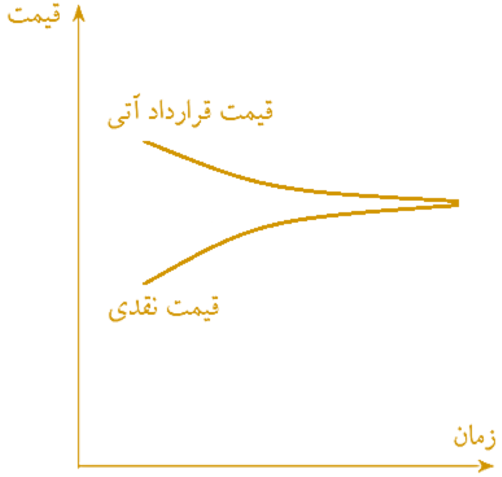
- ✓ قیمت قرار داد آتی: قیمت توافقی

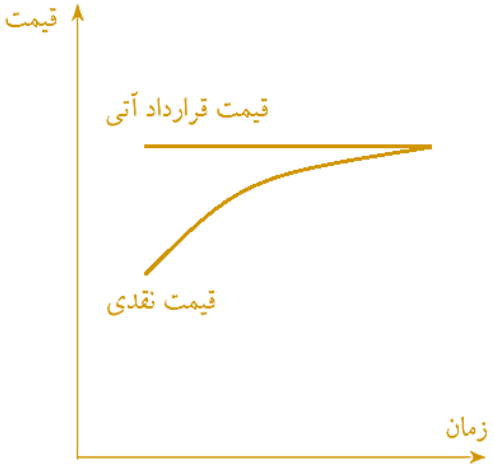
- ✓ ارزش قرارداد آتی: تفاوت قیمت قرارداد آتی با قیمت بازار دارایی پایه

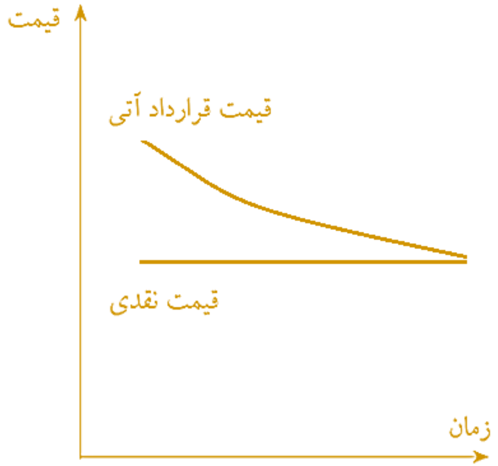
- ✓ ارزش قرارداد آتی در زمان سررسید برابر صفر است در غیر این صورت شرایط آربیتراژی پیش می آید.

همگرایی قیمت نقد و آتی

- ✓ هرچه زمان سررسید قرارداد آتی نزدیک‌تر می‌شود، قیمت آتی به سمت قیمت نقد میل می‌کند.







(ب)

فرمول ارزش قرارداد آتی

مثال در اکسل

$$V_T = \frac{F_T - F_0}{(1+r)^T}$$

V_T: ارزش قرارداد آتی

F_0: قیمت قرارداد آتی در زمان صفر

F_T: قیمت قرارداد آتی (قیمت تسویه به عنوان پراکسی قیمت نقد سررسید) در زمان T

r: نرخ بهره بدون ریسک

T: زمان تا سررسید (سال)

پوشش ریسک و قرارداد آتی

روش‌های پوشش ریسک ۱

Long Future
Short Spot

Long Normal Hedge

پوشش ریسک افزایش قیمت

Short Future
Long Spot

Short Normal Hedge

پوشش ریسک کاهش قیمت

Normal Hedge

زمانی که دارایی موضوع Future و دارایی موضوع Spot همانند باشد.

روش‌های پوشش ریسک ۲

Long Future

Short Spot

Long Cross Hedge

پوشش ریسک افزایش قیمت

Cross Hedge

زمانی که دارایی موضوع Future و دارایی موضوع Spot متفاوت باشد.

Short Future

Long Spot

Short Cross Hedge

پوشش ریسک کاهش قیمت

عناصر پوشش ریسک

- ✓ عنصر اول: ریسک چه چیزی پوشش داده شود؟
- ✓ عنصر دوم: پوشش ریسک برای چه دوره‌ای صورت بگیرد؟
- ✓ عنصر سوم: پوشش ریسک با چه روشی انجام شود؟
- ✓ عنصر چهارم: دارایی پایه قرارداد آتی برای پوشش ریسک چه باشد؟
- ✓ عنصر پنجم: نسبت پوشش ریسک چگونه باشد؟

عنصر اول دارایی

چه چیزی را Hedge کنیم

Micro Hedge

زمانی که ریسک معامله Spot یک دارایی را با یک Future معادل آن Hedge می کنیم.

Macro Hedge

زمانی که ریسک معامله Spot سبد دارایی های مختلف را با یک Future معادل آن Hedge می کنیم.

عنصر دوم دوره

دوره Hedge

Continuous Hedge

ریسک برای همه زمان ها Hedge شود .

Selective Hedge

ریسک برای زمان هایی که فکر می کنیم مناسب Hedge شود .

عنصر سوم روش

- روشهای Hedge
  - مبادله در Spot
    - فروش نقد زمان احتمال افت قیمت
    - استقراض یا خرید نقد زمان احتمال رشد قیمت
  - اختیار(Option)
    - Long Put یا Short Call زمان احتمال افت قیمت
    - Long Call یا Short Put زمان احتمال رشد قیمت
  - آتی (Future)
    - مزایا:
      - هزینه مبادله کم
      - سرعت مبادله بالا
      - نقد شوندگی
      - امکان اتخاذ موقعیت معکوس زمان قیمت گذاری نادرست
  - تاخت (Swap)

عنصر چهارم نوع دارایی پایه

نوع دارایی پایه Future

Strip Hedge

تعدادی قرارداد Future اوراق بدهی با سررسید های متفاوت

Rolling Hedge
یا
Staking Hedge

تعدادی قرارداد Future اوراق بدهی با سررسید برابر که قبل ازسررسید تبدیل به اوراق با سررسید دیرتر می شود.

عنصر پنجم نسبت پوشش ریسک

- ✓ سبد پایه (Basis portfolio):

  - ✓ سبدی متشکل از خرید Spot و فروش Future:

- ✓ Basis= Cash Price – Future Price=S-F

- ✓ Prof(Basis) = $(S_1 - F_1) - (S_0 - F_0)$

  سود حاصل از معامله نقد   سود حاصل از معامله آتی

- ✓ Prof(Basis) = $\underbrace{(S_1 - F_1)}_{\text{Basis 1}} - \underbrace{(S_0 - F_0)}_{\text{Basis 0}}$

نسبت پوشش ریسک ۱

- ✓ نسبت Hedge: تعداد قرارداد مورد نیاز برای پوشش ریسک دارایی خریداری شده

- ✓ تشکیل یک سبد شامل یک واحد Spot و h واحد Future

- ✓ **Basis =** $1(S_1 - S_0) - h(F_1 - F_0)$

تعداد قرارداد آتی

- ✓ **Basis =** $\Delta S - h(\Delta F)$

نسبت پوشش ریسک ۲

- ✓ حداقل کردن ریسک سبد پایه
- ✓ تشکیل یک سبد شامل یک واحد Spot و h واحد Future

- ✓ Var(Basis) $=\mathrm{Var}\big(\Delta S - h(\Delta F)\big)$

- ✓ Var(Basis) $=1^2 Var(\Delta S) + h^2 Var(\Delta F) - 2 * 1 * h\sigma(\Delta S)\sigma(\Delta F)\rho_{\Delta s,\Delta F}$

$$\rho_{\Delta s,\Delta F} = \frac{Cov(\Delta s,\Delta F)}{\sigma(\Delta S)\sigma(\Delta F)}$$

- ✓ **Basis** $=\Delta S - h(\Delta F)$

$$\frac{\delta Var(Basis)}{\delta h} = 0 \;\Rightarrow\; h^* = \frac{Cov(\Delta s,\Delta F)}{Var(\Delta F)}$$

نسبت پوشش ریسک ۳

[مثال در اکسل]

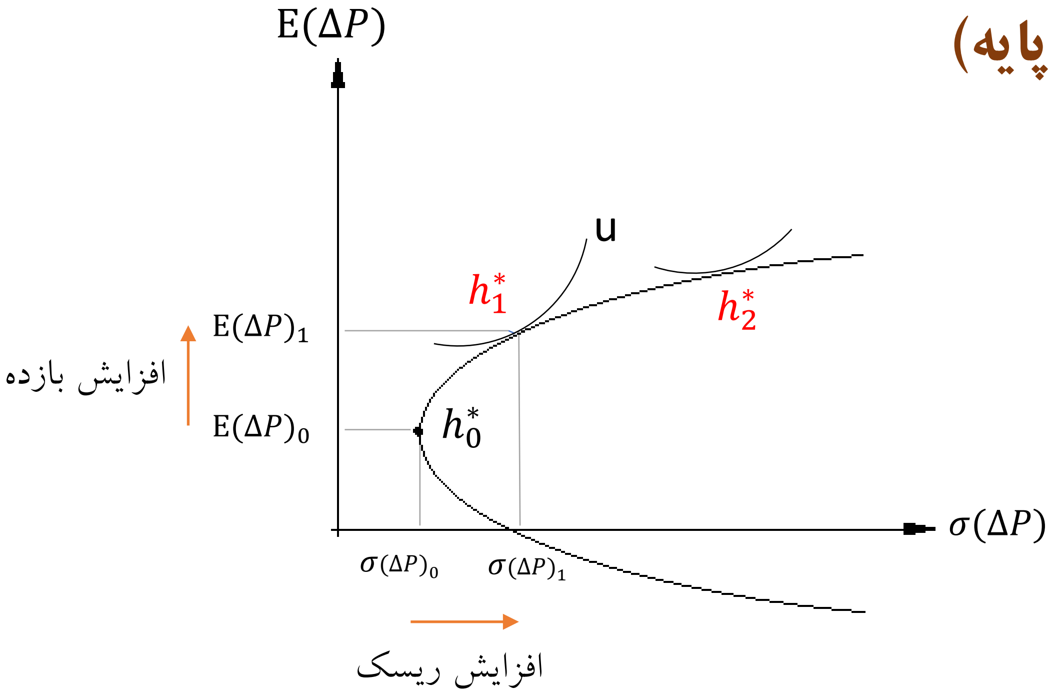
- ✓ برآورد نسبت Hedge با استفاده از رگرسیون
- ✓ طبق قواعد رگرسیون نسبت پوشش را می توان با تخمین معادله خط رگرسون زیر برآورد کرد
- ✓ $\Delta s_t = C + h^*(\Delta F)_t + e_t$

- ✓ ΔS_t سری زمانی $S_T - S_{t-1}$ برای دوره هی زمانی t گذشته
- ✓ ΔF_t سری زمانی $F_T - F_{t-1}$ برای دوره هی زمانی t گذشته

$$\text{تعداد قرارداد های آتی که باید منعقد شود} = \frac{\text{تعداد واحد کالا در خرید نقدی}}{\text{تعداد واحدهای کالا در یک قرارداد آتی}} \cdot h^*$$

نسبت حداقل ریسک در مقابل نسبت بهینه

- ✓ h حداقل ریسک یا h بهینه: بستگی به میزان ریسک پذیری سرمایه گذاران دارد.
- ✓ محور افقی: انحراف معیار ΔP (تغییر در سود سبد پایه)
- ✓ محور عمودی: امید ریاضی یا مقدار انتظاری ΔP
- ✓ u: منحنی بی‌تفاوتی سرمایه گذار



روند توسعه مدل ها

- ✓ Johnson 1960: اولین براورد از نسبت بهینه پوشش ریسک با معیار حداقل ریسک
- ✓ Ederington ۱۹۷۹: اولین استفاده از روش حداقل مربعات معمولی برای تخمین نسبت بهینهٔ پوشش ریسک با استفاده از قیمت‌های قرارداد آتی
- ✓ Kahl and Tomek ۱۹۸۳ استفاده از روش میانگین واریانس برای ایجاد توازن بین بازده و ریسک
- ✓ Howard and D’Antonio ۱۹۸٤ استفاده از روش شارپ و حداکثر کردن تابع مطلوبیت
- ✓ Junkus and Lee ۱۹۸۵ کاربرد چهار روش مختلف پوشش ریسک شامل حداکثرسازی سود، حداقل‌سازی واریانس، حداکثرسازی مطلوبیت و الگویی با فرض حذف فرصت‌های آربیتراژ
- ✓ Bollerslev ۱۹۸٦ کاربرد الگوی گارچ براساس ویژگی دسته‌بندی نوسان‌های سری‌های زمانی مالی در طول زمان

روند توسعه مدل ها

- ✓ Johnson 1960: اولین براورد از نسبت بهینه پوشش ریسک با معیار حداقل ریسک
- ✓ Ederington ۱۹۷۹: اولین استفاده از روش حداقل مربعات معمولی برای تخمین نسبت بهینۀ پوشش ریسک با استفاده از قیمت‌های قرارداد آتی
- ✓ Kahl and Tomek ۱۹۸۳ استفاده از روش میانگین واریانس برای ایجاد توازن بین بازده و ریسک
- ✓ Howard and D’Antonio ۱۹۸٤ استفاده از روش شارپ و حداکثر کردن تابع مطلوبیت
- ✓ Junkus and Lee ۱۹۸٥ کاربرد چهار روش مختلف پوشش ریسک شامل حداکثرسازی سود، حداقل‌سازی واریانس، حداکثرسازی مطلوبیت و الگویی با فرض حذف فرصت‌های آربیتراژ
- ✓ Bollerslev ۱۹۸٦ کاربرد الگوی گارچ براساس ویژگی دسته‌بندی نوسان‌های سری‌های زمانی مالی در طول زمان

قرارداد سواپ

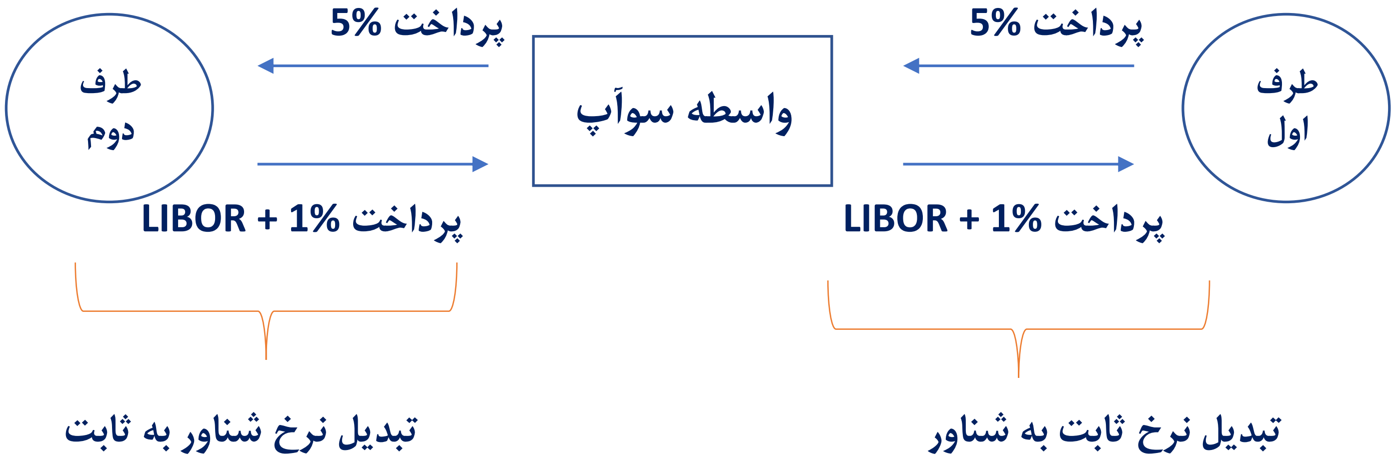
سازوکار قرارداد سوآپ

- ✓ در قرار داد سوآپ ، مجموعه ای از جریان های نقدی ثابت و مجموعه ای از جریان های نقدی شناور با یکدیگر معاوضه (تاخت) می شوند.

- ✓ ریسک تغییرات نرخ دارایی برای طرف ا ول از بین می‌رود.

سوآپ نرخ سود

- ✓ در قرار داد سوآپ نرخ سود ، مجموعه‌ای از پرداخت‌های نرخ سود ثابت و مجموعه ای از پرداخت های نرخ سود شناور بر اساس یک نرخ مرجع (مثل نرخ لایبور (LIBOR) با یکدیگر معاوضه می شوند.
- ✓ نرخ سود روی مبالغ فرضی با عنوان اصل سرمایه فرضی (Notional Principal) محاسبه می شود و در پایان هر سررسید فقط تفاوت ارزش مبادله می شود.



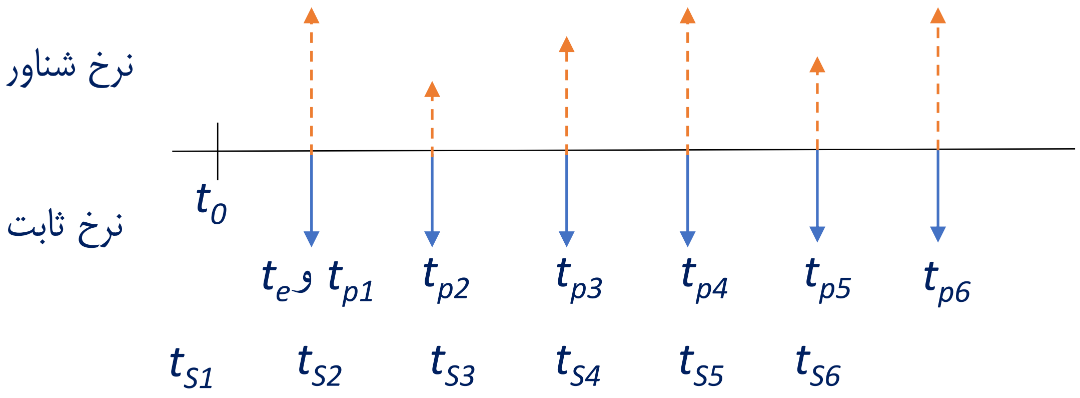
سوآپ نرخ سود استاندارد

✓ تاریخ پرداخت از پیش تعیین شده است.

✓ بر اساس اصل مبلغ فرضی و با ارز های یکسان یکی از طرفین به پرداخت سود بانرخ ثابت و دیگری به پرداخت سود با نرخ شناور متعهد می شود.

✓ هیچ گونه مبادله ای به جز مبادله ما به التفاوت نرخ سود روی اصل مبلغ فرضی انحام نمی شود.

✓ جریان نقد ورودی و خروجی سوآپ نرخ سود



✓ t_e : تاریخ مؤثر

✓ t_{pn} : n امین پرداخت در تاریخ n امین تسویه

✓ t_S : زمان تعیین نرخ شناور برای دوره بعد

مثال سوآپ نرخ سود استاندارد

✓ اصل مبلغ فرضی : 1000000 واحد، نرخ ثابت: ۷% و نرخ شناور : LIBOR

✓ جریان نقدی ثابت و شناور برای پرداخت کننده نرخ ثابت :

تاریخ	نرخ شناور	نرخ ثابت	جریان نقد شناور دریافت شده	جریان نقد ثابت پرداخت شده	خالص دریافتی
۱۰ خرداد	۸٪	۷٪	۸۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	۱۰۰۰۰
۱۰ تیر	۷/۵٪	۷٪	۷۵۰۰۰	۷۰۰۰۰	۵۰۰۰
۱۰ مرداد	۷٪	۷٪	۷۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	۰
۱۰ شهریور	۶٪	۷٪	۶۰۰۰۰	۷۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰
۱۰ مهر	۸/۵٪	۷٪	۸۵۰۰۰	۷۰۰۰۰	۱۵۰۰۰

سوآپ نرخ سود غیر استاندارد و انواع آن

- **از قوانین مطرح شده در سوآپ استاندار پیروی نمی کند و بر اساس نیاز و توافق طرفین طراحی می شود.**
- **سوآپ صعودی :** تغییرات اصل مبلغ فرضی صعودی
- **سوآپ نزولی:** تغییرات اصل مبلغ فرضی نزولی
- **سوآپ متغیر:** تغییرات اصل مبلغ فرضی متغیر
- **سوآپ پایه:** هر دو طرف متعهد به پرداخت جریان نقد شناور اما با نرخ های مرجع متفاوت

سایر انواع سوآپ نرخ سود غیر استاندارد

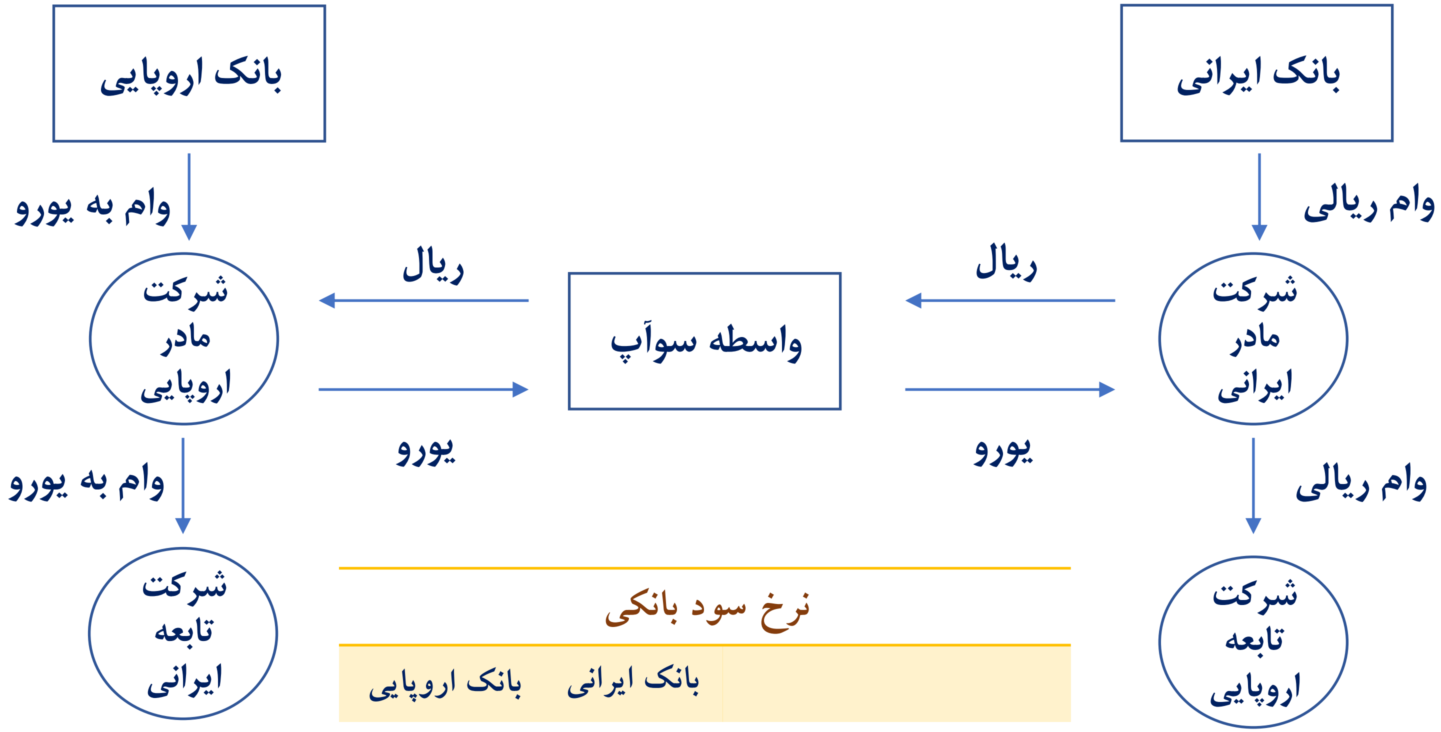
- **سوآپ حاشیه ای:** نرخ شناور بر اساس نرخ مرجع و حاشیه ای که به آن اضافه یا کسر می شود.
- **سوآپ آتی:** تاریخ مؤثر زمان مشخصی در آینده
- **سوآپ متفاوت :** پرداخت ها بر اساس ارز های متفاوت
- **سوآپ با کوپن صفر:** تنها یک پرداخت وجود دارد چه در ابتدا و چه در انتها

سوآپ نرخ ارز

- ✓ **تعریف:**
- ✓ قراردادی دو طرفه برای مبادله دو ارز متفاوت.

- ✓ **تاخت نرخ سود است با این تفاوت‌ها:**
  - ✓ **واحد ارز طرفین معامله یکسان نیست.**
  - ✓ **معمولا اصل مبلغ در تاریخ سررسید مبادله می‌شود.**
  - ✓ **طرفین در مبادله اصل مبلغ در تاریخ موثر مختارند.**
  - ✓ **در مورد شناور بودن و ثابت بودن نرخ ارز مختارند.**

مثال سوآپ نرخ ارز



نرخ سود بانکی		
	بانک ایرانی	بانک اروپایی
شرکت ایرانی	20%	10%
شرکت اروپایی	25%	7%
قدر مطلق تفاوت	5%	3%
خالص مزیت نسبی NCA	NCA=5%-3%=2%	

سوآپ کالا

- ✓ این قرارداد روی کالا هایی از قبیل نفت ، محصولات پتروشیمی، انرژی ، فلزات و فلزات گرانبها مرسوم است. که عبارت است از مبادله نرخ ثابت قرارداد و نرخ شناور قیمت یک کالای خاص

دسته بندی دیگری از سوآپ

سوآپ مالکیت :

مجموعه جریان نقد ناشی از سود سرمایه گذاری در سهام (سود تقسیمی و یا درآمد ناشی از تغییر قیمت سهام) را می توان در مقابل بازدهی ناشی از سایر دارایی ها و یا نرخ های مرجع مانند لایبور قرارداد.

- ✓ **سوآپ اعتباری :**

جریان های نقدی که درجه اعتباری متفاوتی دارند ، در این قرارداد مورد مبادله قرار می گیرند و دو نوع اصلی دارد:

کاربردهای سوآپ

- ✓ مدیریت ریسک
- ✓ کاهش هزینه‌های بدهی
- ✓ اصل مزیت نسبی NCA
- ✓ گریز از محدودیتهای قانونی

مثال محاسبه ارزش فعلی جریان نقد ثابت و شناور سوآپ ۱

✓ **سوآپ نرخ سود :** دوره قرار داد ۳ سال، اصل مبلغ فرضی ۱۰۰۰۰ واحد، نرخ ثابت ۸/۰۵۴۸٪ و نرخ شناور LIBOR سه ماهه

دوره	تعداد روز های دوره	نرخ آتی	عامل تنزیل	جریان نقد شناور	ارزش فعلی جریان نقد شناور	جریان نقد ثابت	ارزش فعلی جریان نقد ثابت
۱	۹۱	۷.۰٪	۱.۰۰۰				
۲	۹۰	۷.۲٪	۰.۹۸۳	۱۷۵.۰۰	۱۷۱.۹۹	۲۰۱.۳۷۰	۱۹۷.۹۱
۳	۹۲	۷.٤٪	۰.۹٦٥	۱۸٤.۰۰	۱۷۷.۵۷	۲۰٥.۸٤٥	۱۹۸.٦٥
٤	۹۰	۷.٦٪	۰.۹٤۸	۱۸٥.۰۰	۱۷٥.۲۹	۲۰۱.۳۷۰	۱۹۰.۸۰
٥	۹۱	۷.۸٪	۰.۹۳۰	۱۹۲.۱۱	۱۷۸.٦۰	۲۰۳.٦۰۷	۱۸۹.۲۸
٦	۹۱	۸.۰٪	۰.۹۱۲	۱۹۷.۱۷	۱۷۹.۷٥	۲۰۳.٦۰۷	۱۸٥.٦۲
۷	۹۰	۸.۲٪	۰.۸۹٤	۲۰۰.۰۰	۱۷۸.۷٦	۲۰۱.۳۷۰	۱۷۹.۹۹
۸	۹۱	۸.٤٪	۰.۸۷٦	۲۰۷.۲۸	۱۸۱.٥۰	۲۰۳.٦۰۷	۱۷۸.۲۹
۹	۹۱	۸.٦٪	۰.۸٥۷	۲۱۲.۳۳	۱۸۲.۰٦	۲۰۳.٦۰۷	۱۷٤.٥۸
۱۰	۹٤	۸.۸٪	۰.۸۳۹	۲۲٤.٥٦	۱۸۸.۳۲	۲۱۰.۳۲۰	۱۷٦.۳۸
۱۱	۹۱	۹.۰٪	۰.۸۲۰	۲۲۲.٤٤	۱۸۲.٤۹	۲۰۳.٦۰۷	۱٦۷.۰۳
۱۲	۹۱	۹.۲٪	۰.۸۰۲	۲۲۷.٥۰	۱۸۲.٤۸	۲۰۳.٦۰۷	۱٦۳.۳۲
۱۳	۹۱	۹.٤٪	۰.۷۸٤	۲۳۲.٥٦	۱۸۲.۳۰	۲۰۳.٦۰۷	۱٥۹.٦۱
		جمع			۲۱٦۱.۱۱		۲۱٦۱.٤٦

مثال محاسبه ارزش فعلی جریان نقد ثابت و شناور سوآپ ۱

✓ در مثال قبل قیمت قرارداد آتی بعد از گذشت ۱ سال به صورت زیر محاسبه می گردد.

دوره	تعداد روز های دوره	نرخ آتی	عامل تنزیل	جریان نقد شناور	ارزش فعلی جریان نقد شناور	جریان نقد ثابت	ارزش فعلی جریان نقد ثابت
۱	۹۱	۷.۸٪	۱.۰۰۰				
۲	۹۱	۸.۰٪	۰.۹۸۱	۱۹۷.۱۷	۱۹۳.۳۵	۲۰۳.۶۰۷	۱۹۹.۶۷
۳	۹۰	۸.۲٪	۰.۹۶۱	۲۰۰.۰۰	۱۹۲.۲۹	۲۰۱.۳۷۰	۱۹۳.۶۰
٤	۹۱	۸.٤٪	۰.۹٤۲	۲۰۷.۲۸	۱۹۵.۲٤	۲۰۳.۶۰۷	۱۹۱.۷۸
٥	۹۱	۸.٦٪	۰.۹۲۲	۲۱۲.۳۳	۱۹٥.۸٤	۲۰۳.٦۰۷	۱۸۷.۷۹
٦	۹٤	۸.۸٪	۰.۹۰۲	۲۲٤.٥٦	۲۰۲.٥۷	۲۱۰.۳۲۰	۱۸۹.۷۲
۷	۹۱	۹.۰٪	۰.۸۸۲	۲۲۲.٤٤	۱۹٦.۲۹	۲۰۳.٦۰۷	۱۷۹.٦۷
۸	۹۱	۹.۲٪	۰.۸٦۳	۲۲۷.٥۰	۱۹٦.۲۹	۲۰۳.٦۰۷	۱۷٥.٦۸
۹	۹۱	۹.٤٪	۰.۸٤۳	۲۳۲.٥٦	۱۹٦.۰۹	۲۰۳.٦۰۷	۱۷۱.٦۸
			جمع		۱٥٦۷.۹٦		۱٤۸۹.٦۰

✓ **ارزش سوآپ: ۱٥٦۷/۹٦-۱٤۸۹/٦=۷۸/۳٦**

تعبیر ریاضی فرآیند قیمت‌گذاری قرارداد سوآپ

بیان مفاهیم به زبان ریاضی:

$$PV_{P_{fi}} = \sum P_{fi} * D_{fi}$$

$$V_{Si} = PV_{P_{fi}} - PV_{P_{xi}}$$

V_{Si} : قیمت قرارداد سوآپ در i امین دوره

D_{fi}: عامل تنزیل در i امین دوره

n_i : تهداد روزها در i امین دوره

f_i : نرخ آتی در i امین دوره

$$D_{fi} = \frac{D_{fi-1}}{1 + (f_{i-1} * \frac{n_i}{360})}$$

P_{xi} : مبلغ پرداختی با نرخ ثابت قرارداد درi امین دوره

N_i : اصل مبلغ فرضی در i امین دوره

r_x : نرخ ثابت قرارداد

$$P_{xi} = r_x * \frac{n_i}{360} * N_i$$

P_{fi} : مبلغ پرداختی با نرخ شناور درi امین دوره

$$P_{fi} = f_{i-1} * \frac{n_i}{360} * N_i$$

مباحثی برای آینده

- سود تقسیمی و مدل دو جمله ای
- تغییر در پارامترهای مدل دو جمله ای
- سایر محدودیتهای اربیتراژ
- کارآیی بازار اختیارات
- اختیارات ترکیبی
- اختیار اتی

- جامپ از دابوفسکی
- چسبندگی ثابت واریانس
- واریانس تصادفی
- بلک شولز اختیار خرید امریکایی و روشهای عددی
- بلک شولز اختیار فروش امریکایی
- اختیار شاخص
- اختیار نرخ بهره